Esej

Fregeho reforma logiky na pozadí Aristotelovy teorie sylogismů[1]

Ladislav Kvasz
Filosofický ústav Akademie věd ČR, v. v. i., Praha
kvasz@flu.cas.cz

Abstract:

Frege's Reform of Logic against the Background of Aristotle's Theory of the Syllogisms

The text attempts, in a new way, to interpret the transition from Aristotelian syllogistic logic to Frege's mathematical logic and thus builds on my previous analyses of Aristotle's logic. Provided that the proposed interpretation shows itself to be adequate, it can help further develop formal epistemology that I presented in one of my previous contributions (Kvasz, L., Formalna epistemológia – budúca syntéza. *Filosofický časopis*, 64, 2016, No. 6, pp. 951–963). Formal epistemology attempts to emulate, in epistemology, Frege's reform of logic. A new understanding of the transition from Aristotle's to Frege's logic will allow us to divide the formalizing epistemology into several tasks, namely the introduction of relational, compositional and deductive syntheses into the language of epistemology, i.e. tasks that correspond to the steps that Frege undertook in building his logic.

Keywords: Aristotle, Gottlob Frege, theory of syllogism, predicate calculus, implication, negation

DOI: https://doi.org/10.46854/fc.2026.1r.119

Tento výklad je svým způsobem pokračováním textu „Aristotelova sylogistická logika jako teorie aritmetického typu",[2] v němž jsme předložili novou interpretaci Aristotelovy logiky. Ukázali jsme, že konstrukce jazyka sestáva-

1 Článek je součástí projektu Lumina Quaeruntur *Odemykání matematiky: výuka a vzdělávací praxe v habsburských zemích během dlouhého 18. století,* řešeného na Akademii věd České Republiky. Chtěl bych poděkovat Vítu Gvoždiakovi za pomoc s jazykovou redakcí textu.

2 Kvasz, L., Aristotelova sylogistika jako teorie aritmetického typu. *Filosofický časopis*, 72, 2024, č. 1, s. 3–22.

jícího z prvků, jako je subjekt, predikát a spona, pomocí níž Aristotelés formuloval teorii sylogismů, je jazykem aritmetického, a nikoli matematického typu. Z tohoto důvodu se Aristotelova logika nehodí k analýze důkazů eukleidovské geometrie. Cílem tohoto eseje je pokusit se o novou interpretaci vztahu mezi Aristotelovou (podle nás aritmetickou) logikou a Fregeho matematickou logikou.

Vojtěch Kolman v této souvislosti napsal: „Chápeme-li logiku jako podnik zabývající se otázkami zdůvodňování platnosti soudů, …Aristotelova sylogistika představuje důležitý precedens, který Frege ‚pouze' jistým způsobem upravil a rozvinul. To, že v praxi nejsme schopni toto jeho rozšíření z tradiční logiky odvodit, je pak dáno jednoduše faktem, že se Frege na rozdíl od Aristotela orientoval na jiný úsudkový diskurz, a musel proto začít *ab ovo*."[3] Problém odvození Fregeho rozšíření z tradiční logiky navrhujeme nazvat *Kolmanovým problémem.* Předkládaný text je pokusem tento problém vyřešit.

V knize *Patterns of Change*[4] jsme nebyli schopni rekonstruovat přechod mezi Aristotelovou a Fregeho logikou kvůli nesprávnému pochopení povahy této změny. Interpretovali jsme ji jako *re-prezentaci*, tj. na čtyřprvkové škále velikosti změny (od největší – idealizaci, přes re-prezentaci a objektivizaci, až po nejmenší – re-formulaci) jako změnu druhé velikosti. Takto ostatně hodnotil svůj čin sám Frege, který ve svém eseji „Funktion und Begriff" popisuje vývoj matematiky těmito slovy: „Pohlédneme-li odtud zpětně na vývoj aritmetiky, rozpoznáme stupňovitý vzestup. Nejprve se počítalo s jednotlivými čísly, s 1, 3 atd. …Pak se postoupilo dále k obecnějším zákonům, které platí pro všechna čísla. V tomto vztahu tomu odpovídá přechod k počítání s písmeny. …Tím se dospělo ke zkoumání jednotlivých funkcí, aniž by se toto slovo používalo v matematickém smyslu a aniž by se pochopil jeho význam. Dalším vyšším stupněm bylo poznání obecnějších zákonů o funkcích, a tím i prosazení umělého výrazu ‚funkce'. V tomto vztahu tomu odpovídá zavedení písmen jako *f*, *F* k neurčitému naznačení funkcí. …Tím se dospělo k jednotlivým funkcím druhého stupně, aniž by se však uchopilo to, co my nazýváme funkcemi druhého stupně. Tím, že se tak učinilo, se dosáhlo dalšího pokroku."[5]

„Další pokrok", zmiňovaný v poslední větě, odkazuje na Fregeho *Pojmové písmo* z roku 1879.[6] Frege tedy svůj přínos logice chápal jako změnu v rámci

3 Kolman, V., *Filosofie čísla*. Praha, Filosofia 2008, s. 163.

4 Kvasz, L., *Patterns of Change. Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Basel, Birkhäuser Verlag AG 2008.

5 Frege, G., Funktion und Begriff. In: týž, *Funktion, Begriff, Bedeutung* (1891). Český překlad Jiřího Fialy in: Frege, G., *Logická zkoumání. Základy aritmetiky*. Praha, Oikoymenh 2012, s. 55–78; zde s. 77.

6 Frege, G., *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1879). Hildesheim, Georg Olms 1993. Český překlad Jiřího Fialy: *Pojmopis. Formulový jazyk čistého myšlení po vzoru formulového jazyka aritmetiky*. Praha, Oikoymenh 2012. Fregeho *Begriffsschrift* budeme označovat jako *Pojmové písmo*, což podle našeho názoru lépe odpovídá významu Fregeho názvu než *Pojmopis*, jak dílo nazval překladatel.

matematiky, jako přechod od jazyka diferenciálního a integrálního počtu k jazyku predikátového počtu, který je analogický přechodu od jazyka aritmetiky k jazyku algebry nebo od jazyka algebry k jazyku diferenciálního a integrálního počtu. Proto jsme vznik predikátového počtu interpretovali jako změnu, která se odehrála *v rámci jazyka matematiky* a přinesla nárůst jeho logické, expresivní, explanatorní a integrativní síly.[7] Předpokládali jsme, že pokud někdo rozuměl podstatě Fregeho práce, byl to právě on sám. Stejně jsme Fregeho revoluci chápali i v článku „Formálna epistemológia – budúca syntéza“,[8] kde jsme předložili projekt formální epistemologie založený na myšlence, že Fregeho revoluci je možné napodobit také v epistemologii.

Jonathan Barnes charakterizoval vztah mezi Aristotelovou a Fregeho logikou slovy: „Když se Frege rozhodl zavrhnout subjekty a predikáty a začít nový život s argumenty a funkcemi, tvrdil, že subjekty a predikáty jsou jedny z mála nevhodných pojmů, které gramatika vnutila logice. Netvrdil, že subjekty a predikáty jsou předměty jako flogiston a světelný éter; byl si však jistý, že jsou to přinejmenším prvky vhodné výhradně pro zrak gramatika.“[9] Barnesova metafora odpovídá našemu původnímu pojetí fregovské revoluce.

Postupně jsme však dospěli k závěru, že výklad Fregeho revoluce, k němuž se hlásí Frege i Barnes, není dostatečně radikální. Aristotelova a Fregeho logika se liší zásadnějším způsobem, než je re-prezentace – liší se ve způsobu *idealizace*. Hlavní tezí našeho předchozího článku[10] bylo tvrzení, že *Aristotelova sylogistická logika má blíže k počtům než k matematice*. To znamená, že Aristotelovu sylogistickou logiku od matematické logiky dělí změna zásadnější povahy, než je změna způsobu symbolické reprezentace jejího předmětu. K pochopení této skutečnosti nás přivedl podtitul Fregeho práce *Begriffsschrift*,[11] který zní: *Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (*Formulový jazyk čistého myšlení vytvořený podle vzoru formulového jazyka aritmetiky*). Modelovat logiku podle vzoru aritmetiky jsem osobně vždy považoval za zvláštní. „Kdybych já měl napsat *Begriffsschrift*“,[12] jako podtitul bych volil vyjádření typu *Jazyk čistého myšlení vytvořený podle vzoru jazyka eukleidovské geometrie*. Pokud bychom totiž hledali kánon logického uvažování, z něhož se matematici po desítky generací učili, co je to důkaz, pak by to byly právě Eukleidovy *Základy*. Chápat počty jako model

7 Kvasz, L., *Patterns of Change. Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, c.d., s. 67–76.

8 Kvasz, L., Formálna epistemológia – budúca syntéza. *Filosofický časopis*, 64, 2016, č. 6, s. 951–963.

9 Barnes, J., *Truth, etc. Six Lectures on Ancient Logic*. Oxford, Clarendon Press 2007, s. 93.

10 Kvasz, L., Aristotelova sylogistika jako teorie aritmetického typu, c.d.

11 Frege, G., *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, c.d. Český překlad Jiřího Fialy: *Pojmopis. Formulový jazyk čistého myšlení po vzoru formulového jazyka aritmetiky*, c.d.

12 Samozřejmě jsem si vědom neadekvátnosti takových ambicí, proto zde užívám uvozovky.

čistého myšlení se zdá skandální. Úkolem, který před námi stojí, je proto pochopit, jak je možné, že si Frege v rozporu se vším, co se z hlediska dějin matematiky jeví jako rozumné, správné a přirozené, zvolil za model logiky aritmetiku.[13]

1. Povaha Fregeho reformy logiky

Při práci na knize *Descartes Nikétés*[14] jsme vypracovali interpretační prostředky, které umožňují pochopit, že Fregeho revoluce v logice[15] je zásadnější změnou, než jak ji chápal sám Frege a než jak jsme ji chápali v knize *Patterns of Change*. Při přechodu od aristotelské sylogistické logiky k moderní matematické logice se změnil celkový charakter jazyka, jehož prostřednictvím je logika budována, tj. povaha jeho *relační, skladební a deduktivní syntézy*,[16] a nikoli pouze logická, expresivní, explanatorická nebo integrativní síla, s níž jazyk tyto syntézy provádí. Že se nový vhled do Fregeho logiky zrodil při práci na textu o Descartovi, není překvapivé. Leibnizův projekt *univerzální charakteristiky* vznikl při reformě Descartovy *mathesis universalis*. Descartes formuloval *mathesis* algebraicky. Když Leibniz objevil diferenciální a integrální počet, uvědomil si, že má v rukou nástroj, který je mnohem mocnější než algebraicky pojatá *mathesis*.[17] Nebyl by to však Leibniz, kdyby zůstal u diferenciálního a integrálního počtu a nepřišel s projektem ještě obecnější-

13 Frege považoval geometrii za syntetickou, zatímco aritmetika byla podle něj analytickou disciplínou, redukovatelnou na logiku. S tímto přesvědčením jistě souvisí i jeho upřednostnění aritmetiky na úkor geometrie. Aritmetiku však nelze na toto přesvědčení redukovat nebo pomocí něj vysvětlovat. Počty jsou z logického hlediska triviální, banální a nezajímavé – nebo se tak alespoň matematikům jevily, dokud Frege neukázal, že opak je pravdou. Viz Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (1884). Hrsg. von Ch. Thiel. Hamburg, Felix Meiner Verlag 1998. Český překlad Jiřího Fialy in: *Logická zkoumání. Základy aritmetiky*, c.d., s. 143–261.

14 Kvasz, L., *Descartes Nikétés*. Praha, Filosofia 2021.

15 Fregeho reforma logiky je v literatuře často označována jako revoluce. (Viz např. Gillies, D., The Fregean Revolution in Logic. In: týž (ed.), *Revolutions in Mathematics*. Oxford, Clarendon Press 1992, s. 265–306.) V zásadě s tímto názorem souhlasíme. To, co se v logice odehrálo pod vlivem Fregeho práce, bylo bezpochyby revolucí. Byla to však revoluce poněkud zvláštní – dvacet let si jí nikdo nevšiml. Když budeme psát o dějinách matematiky, budeme Fregeho čin označovat za revoluci. Při výkladu Fregeho textů se nám však zdá adekvátnější mluvit o reformě. Možná v tom ale žádný rozpor není, vždyť i Kuhn dal jedenácté kapitole své slavné knihy *The Structure of Scientific Revolutions* (1962) název „Neviditelnost revolucí“. Viz Kuhn, T., *Struktura vědeckých revolucí*. Přel. T. Jeníček. Praha, Oikoymenh 1997.

16 Viz Kvasz, L., Aristotelova sylogistika jako teorie aritmetického typu, c.d. Na s. 7–10 jsou tyto pojmy popsány.

17 Rozdíl mezi Descartovou algebraicky pojatou *mathesis* a Leibnizovým diferenciálním a integrálním počtem je patrný v moderní fyzice. Celá moderní fyzika byla vytvořena pomocí Leibnizova nástroje, neboť Descartova algebraická *mathesis* nestačí potřebám matematické fyziky, není dostatečně *univerzální*.

ho jazyka, který by překročil i hranice diferenciálního a integrálního počtu směrem ke zcela obecné manipulaci se symboly. Ale právě kvůli naprosté obecnosti Leibniz nedokázal dát svému projektu *univerzální charakteristiky* jasnější obrysy.

Fregeho význam spočívá mimo jiné v tom, že objevil způsob, jak vymezit jakousi střední polohu mezi pravidly umožňujícími zcela obecné transformace symbolů, o nichž snil Leibniz, a pravidly diferenciálního a integrálního počtu, která jsou stále omezena na funkce vyjadřující veličiny: *pravidla zachovávající pravdivostní hodnotu výroků*. Tedy ne zcela obecná pravidla, která popsali až Gödel, Turing nebo Church. Frege našel mezistupeň mezi infinitezimálním počtem a zcela obecným jazykem teorie algoritmů. Pravidla diferenciálního a integrálního počtu (která objevil Leibniz) zachovávají pravdivost výroků. Třída pravdivost zachovávajících transformací se však pravidly diferenciálního a integrálního počtu nevyčerpává. Fregeho revoluce je uskutečněním Leibnizova snu o radikálním zobecnění Descartovy *mathesis universalis*. Nepřímo, prostřednictvím Leibnize, byl proto Descartes a jeho projekt univerzální matematiky pro Fregeho klíčový.

V článku „Aristotelova sylogistika jako teorie aritmetického typu“[18] jsme ukázali, že Aristotelova logika je teorií aritmetického typu, zatímco Fregeho logika je teorií matematického typu, což znamená, že vznik Fregeho logiky je na čtyřstupňové škále jazykových změn změnou nejvyššího stupně – idealizací. To nám poskytuje rámec, který umožňuje rekonstrukci přechodu od Aristotelovy k Fregeho logice. Tento rámec se skládá z pěti pojmů: fenomenální redukce, relační syntéza, ontologická redukce, skladební syntéza a deduktivní syntéza. Musíme tedy popsat, jak Frege změnil fenomenální redukci, jak zavedl nový druh relační syntézy, jak zavedl ontologickou redukci a skladební syntézu, a konečně jak změnil deduktivní syntézu logiky.

Fregeho a Barnesova interpretace Fregeho revoluce sice není dostatečně radikální, ale je věcně oprávněná. Frege vytvořil v matematice novou reprezentaci, která změnila logickou, expresivní, explanatorní a integrativní sílu jejího jazyka. Takový popis Fregeho inovace však zachycuje pouze to, čím se jazyk jeho logiky liší od jazyka diferenciálního a integrálního počtu.[19] Navzdory své faktické správnosti je ale takový výklad pro pochopení přechodu od Aristotela k Fregovi nedostatečný. Takové pojmy jako logická, expresivní, explanatorní nebo integrativní síla jazyka neumožňují pochopit podstatu

18 Kvasz, L., Aristotelova sylogistika jako teorie aritmetického typu, c.d.

19 Leibnizovský kontext byl pro Fregeho jistě důležitý, neboť to byl právě Leibniz, kdo se pokusil vytvořit logiku jako *univerzální charakteristiku*. Jak jsme uvedli, Fregeho reformu logiky lze považovat za uskutečnění tohoto Leibnizova snu. Kromě tohoto koncepčního aspektu byl leibnizovský kontext pro Fregeho důležitý i v technickém smyslu, neboť *pojem funkce*, který byl klíčovým nástrojem Fregeho reformy, pochází od Leibnize.

této změny. Přechod od Aristotelovy logiky k logice Fregeho lze pochopit teprve tehdy, když tento přechod chápeme jako změnu relační, skladební a deduktivní syntézy jazyka, přičemž tyto syntézy jsou u Aristotela interpretovány jako aritmetické a u Frega jako matematické.

Tento pohled na vztah mezi Aristotelovou a Fregeho logikou se zdá být přirozený. Uvažujme nejprve *relační syntézu*, tj. způsob, jakým jazyk vytváří elementární vztahy. U Aristotela jsou základem relační syntézy dva pojmy A a B, které v jeho logice vstupují do čtyř možných vztahů: každé A je B, některé A je B, žádné A není B nebo některé A není B. To připomíná vztahy, které mohou existovat mezi dvěma čísly. Číslo *a* může být menší než *b*, může být rovno *b* nebo může být větší než *b*. Aristotelova logika má tedy, stejně jako elementární aritmetika (tj. počty) omezený arzenál relací, do něhož relační syntéza zasazuje její prvky. Naproti tomu relační syntéza eukleidovské geometrie pracuje s velkým množstvím relací elementárních objektů, kterými jsou body, přímky a kružnice. Dvě přímky v rovině mohou být buď rovnoběžné, nebo se mohou protínat. Jedna může být na druhou kolmá; může s ní svírat úhel 72 stupňů, jako strana a úhlopříčka pravidelného desetiúhelníku (vedená středem); nebo může svírat úhel 60 stupňů, jako dvě strany rovnostranného trojúhelníku; nebo úhel 45 stupňů, jako strana a úhlopříčka čtverce; nebo 30 stupňů, jako úhel, v němž se setkávají strana a výška v rovnostranném trojúhelníku. Přímka může protínat kružnici ve dvou bodech a může, ale nemusí procházet jejím středem, může se jí dotýkat v jediném bodě nebo může ležet zcela mimo ni. Vidíme tedy, že relační syntéza jazyka geometrie je mnohem bohatší než relační syntéza jazyka aritmetiky nebo Aristotelovy logiky. V geometrii musíme rozlišovat výše uvedené případy a také mnoho dalších, protože každý z nich má pro matematický důkaz jiné důsledky.

Ve Fregeho logice není elementární výrok dán dvojicí pojmů A a B, ale vztahem funkce a jejích argumentů. Přitom každý z uvedených vztahů mezi elementárními objekty jazyka geometrie lze pomocí jazyka analytické geometrie zapsat jako vztah funkce a jejích argumentů (tj. relační syntéza jazyka Fregeho logiky je alespoň tak bohatá jako relační syntéza jazyka eukleidovské geometrie). Výše uvedené vztahy nelze vyjádřit přirozeným způsobem pomocí subjektu a predikátu, protože být kolmý na přímku *b* není vlastností přímky *a*, ale vlastností vztahu obou přímek.

Podobně: když se podíváme na *skladební syntézu*, tedy na to, jak jazyk spojuje prvky při popisu složitých situací (neboť jednou z hlavních rolí jazyka je umožnit kognitivní uchopení toho, co je složité), zjistíme, že Aristotelova logika ve skutečnosti žádnou skladební syntézou nedisponuje. Každý výrok, s nímž se v teorii sylogismů setkáváme, je spojením jediného subjektu s jediným predikátem. Aristotelés ve své logice žádné složené propozice neanalyzuje. A to je v souladu s povahou jazyka aritmetiky (tj. počtů). Stejně jako v Aristotelově sylogistice neexistují složené propozice, neexistují ani v elementární aritmetice žádná „složená" čísla. Číslo může být velké, ale to znamená pouze nahromadění velkého počtu jednotek. Aritmetika nezná žádné složené číslo.

Naproti tomu Frege v *Pojmovém písmu*[20] analyzuje propozice se značnou skladební komplexností. Ačkoli používá pouze tři operace (negaci, implikaci a kvantifikaci), kombinuje je, a dokáže tak tvořit složité formule. A ve složitosti svých formulí je Fregeho logika příbuzná geometrii – stačí si vzít konstrukce z Eukleidových *Základů*. Z hlediska skladební syntézy je tedy Aristotelova logika příbuzná počtům, zatímco Fregeho logika je příbuzná matematice.

A konečně: v *deduktivní syntéze* nacházíme podobné rozdíly. Důkazy podléhají v Aristotelově logice jednoduchým pravidlům, která se ve středověku nazývala ***c**onversio*, ***m**uta*, ***p**er accidenns* a ***s**impliciter*. Pomocí těchto pravidel lze redukovat mod sylogismu na sylogismus první figury. První písmeno středověkého názvu sylogismu udávalo, na který sylogismus první figury je daný mod redukovatelný (mod *Cesare* je redukovatelný na *Celarent*, zatímco mod *Bocardo* je redukovatelný na *Barbara*). Písmeno za první samohláskou označovalo způsob redukce, např. mod *Bocardo* obsahoval **c**, což znamenalo, že bude použito ***c**onversio*, kterým bude *Bocardo* redukováno na *Barbara*.[21] Tato téměř mechanická kodifikace důkazů je paralelní s jednoduchými pravidly počítání. Naproti tomu důkazy Fregeho systému nelze převést na mechanický postup. Podíváme-li se na formuli výrokového počtu, jako je $a \rightarrow a$, není jasné, jak máme při dokazování postupovat.

2. Přechod od Aristotelovy logiky k logice Fregeho jako změna způsobu idealizace

Když jsme si uvědomili, že *přechod od Aristotelovy k Fregeho logice zahrnuje změnu relační, skladební a deduktivní syntézy*, stal se přechod od Aristotelovy k Fregeho logice srozumitelným. Nesmíme však zapomínat, že změny v relační, skladební a deduktivní syntéze jsou spojeny se dvěma druhy redukce. Relační syntéza souvisí s fenomenální redukcí a skladební syntéza s redukcí ontologickou. To znamená, že musíme pochopit, jak Frege změnil relační, skladební a deduktivní syntézu při přechodu od sylogistické logiky k matematické logice, a dále, jak změnil fenomenální a ontologickou redukci, které

20 Frege, G., *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, c.d.

21 Beaney, M., *Frege Making Sense*. Landon, Bloomsbury Academic Press 1996, s. 272.

jednotlivé druhy syntézy umožňují.[22] Posloupnost vedoucí od změny fenomenální redukce a relační syntézy přes změnu ontologické redukce a skladební syntézy ke změně deduktivní syntézy představuje základní etapy Fregeho revoluce v logice.

2.1 Změna fenomenální redukce

Fenomenální redukcí rozumíme nahrazení jevů dané oblasti jejich reprezentací. Předmětnou oblast určité disciplíny tvoří soubor jevů, které daný obor studuje. Chceme-li tedy objasnit povahu fenomenální redukce aristotelské logiky, musíme si základní jevy, které tato teorie popisuje, tj. pojmy, soudy a argumenty, představit tak, jak existovaly předtím, než je Aristotelés popsal v *Topikách* a v *Prvních analytikách*.[23] V tomto příspěvku není dostatek místa na detailní rekonstrukci chápání pojmů, soudů a argumentů v řecké filosofii před Aristotelem. Stačí nicméně poznamenat, že zasazení pojmů do hierarchického systému rodů a druhů, výklad soudu jako spojení subjektu a predikátu a výklad argumentu jako spojení tří pojmů v sylogismu jsou změny, které představují fenomenální redukci Aristotelovy logiky. Aristotelés redukoval způsob, jakým spontánně myslíme a argumentujeme, na určitý formální systém.

V případě aritmetiky má fenomenální redukce podobu počítání, které redukuje objekty pomocí *jednotky* na čísla. Když počítáme děti na hřišti, namísto Zuzanka, Anička a Alex říkáme jedna, dvě, tři. I přes rozdíly v pohlaví, výšce a barvě vlasů při počítání *redukujeme* děti na jednotky. V Aristotelově logice vede fenomenální redukce k subjekt-predikátové stavbě soudu. To, co v logice označujeme jako subjekt (např. Anička), podřazujeme při počítání pod predikát (v našem případě dítě). Akt redukce, který umožňuje započítat Aničku při počítání dětí, a akt redukce, který umožňuje vyslovit soud „Anička je dítě“, jsou analogické. Jde o fenomenální redukci *aritmetického typu*, při níž *na základě přítomnosti určitých charakteristických črt počítáme nebo zařazujeme objekt do příslušné třídy*.

Frege nahradil Aristotelovu subjekt-predikátovou formu soudu *analýzou soudu na funkci a její argumenty*. Je zřejmé, že právě subjekt-predikátová

22 Jazyk matematiky, na rozdíl od jazyka fyziky, nemá kauzální redukci. Kauzální redukci zavedl Newton, když veškeré působení vyložil jako působení sil. V matematice kauzální redukce neexistuje a deduktivní syntéza je přímo napojena na skladební syntézu. Eukleidés mezi skladební a deduktivní syntézu nevkládá žádnou redukci.

23 Zde možná rozšiřujeme pojem fenoménu, když za fenomény považujeme také pojmy, soudy a argumenty, jež spontánně vznikají v diskurzivní praxi určité kultury. Běžně jsou fenomény chápány jako vázané na smyslové vnímání (nejčastěji vizuální). Chceme-li však pochopit například vznik algebry (nebo logiky), není úzká vazba na smyslové vnímání (zejména vizuální) na místě.

struktura soudu znemožnila aristotelské logice analyzovat věty Eukleidových *Základů*. Například v Pythagorově větě: *V pravoúhlých trojúhelnících se obsah čtverce nad stranou protější pravému úhlu rovná obsahům čtverců nad stranami svírajícími pravý úhel*,[24] může Aristotelova logika zvolit pravoúhlé trojúhelníky za subjekt a zbytek za predikát. Pythagorova věta se však týká vztahu tří čtverců a Aristotelova logika neumožňuje tyto vztahy vyjádřit, protože její fenomenální redukce je aritmetická, a nikoli matematická – všímá si charakteristických črt předmětů, nikoli vzájemných vztahů jejich částí.

2.2 Změna relační syntézy jazyka

Smyslem fenomenální redukce je umožnit zavedení relační syntézy. Když jsou jevy redukovány na své reprezentace (ať už na jednotky, nebo na subjekty a predikáty), otevírají se bohatší možnosti popisu vztahů mezi reprezentacemi, než jaké existují při obvyklém přístupu k fenomenální oblasti. Například běžným pohledem nejsme schopni porovnat počet zápalek, jež vypadly ze dvou krabic pohozených vedle sebe na podlaze. Není však problém spočítat obě hromádky zápalek a pak porovnat takto získaná čísla. Redukce fenoménu mnohosti na číslo umožňuje korelovat dva jevy (dvě hromádky zápalek rozházené vedle sebe), které nemůžeme porovnat běžným pohledem. Podobně redukcí soudu na jeho subjekt-predikátovou formu otevírá Aristotelova logika možnost podrobit subjekt kvantifikaci. To je důležitý krok. Rozlišení obecných a částečných soudů je základem Aristotelova logického čtverce, který mimo jiné ukazuje, že k vyvrácení obecného kladného soudu (Každý kůň je hnědý) nemusíme dokazovat obecný záporný soud (Žádný kůň není hnědý), ale stačí dokázat částečný záporný soud (Některý kůň není hnědý). Subjekt-predikátová stavba soudu tak pomocí kvantifikace obohacuje relační syntézu jazyka o vztahy, které vystupují v Aristotelově logickém čtverci.

Fregeho nahrazení fenomenální redukce aritmetického typu, která si všímá pouze jedné charakteristické črty jevů (tu, jejíž nositele počítáme), fenomenální redukcí matematického typu, která si všímá více prvků a jejich vztahů, má zásadní význam pro relační syntézu. Frege nahradil *monadickou kvantifikaci* Aristotelovy logiky (kterou lze z Fregeho pohledu charakterizovat tím, že kvantifikujeme pouze jeden argument, a to subjekt) *polyadickou kvantifikací*, která umožňuje kvantifikovat jakoukoli proměnnou. Tato změna uvedla kvantifikaci do souladu s praxí matematiky, kde bývá v jedné propozici více kvantifikátorů.

24 Šír, Z. (ed.), *Řecké matematické texty*. Řecko-české vydání. Přel. R. Mašek – A. Šmíd. Praha, Oikoymenh 2011, věta I, 47, s. 131.

2.3 Změna ontologické redukce

Ontologická redukce jazyka matematiky přináší nahrazení určité komplexní konfigurace její konstrukcí. Spočívá v zavedení elementární úrovně popisu (v případě Eukleidových *Základů* sestávající z bodů, úseček a kružnic), na kterou odkazují postuláty. Počty neznají ontologickou redukci. Při počítání nemáme žádnou ontologickou úroveň popisu, odlišnou od úrovně fenomenální, která by byla základem konstrukce čísel. Můžeme počítat cokoli, aniž bychom se museli opírat o společnou ontologii počítaných jevů. Absence ontologické redukce se v Aristotelově logice projevuje v tom, že elementární soud má podobu spojení dvou pojmů, například *Kůň je savec*, a navazuje na fenomenální redukci výpovědi na subjekt a predikát. V důsledku toho Aristotelova logika obsahuje operaci inverze soudu, kdy z věty *Některý kůň je savec* vzniká věta *Některý savec je kůň*.

Na rozdíl od Aristotela zavádí Frege ve své logice ontologickou redukci a přechází od spojení dvou pojmů (tak akt predikace chápe Aristotelés) k predikaci chápané jako vztah pojmu a jména předmětu, který je prvkem ontologického rozvrhu skutečnosti. Frege považuje elementární propozici nikoli za vztah dvou pojmů (tj. vztah ontologicky neukotvený), nýbrž za vztah pojmu a jména (tj. vztah ontologicky ukotvený ve třídě objektů, k jejímž prvkům se jméno vztahuje).

2.4 Změna skladební syntézy jazyka

Při počítání nás zajímá pouze to, zda předmět před námi je nositelem znaku, podle kterého určujeme, zda něco je, či není jednotkou. Skladební syntéza, tj. to, jak se z jednotek (tj. elementárních objektů jazyka počtů) generují složené objekty, tj. čísla, tedy navazuje na fenomenální redukci. Skladební syntézu jazyka počtů, tj. sčítání, odčítání, násobení a dělení, lze převést na operaci připočítání nebo odečtení jednotky. Tvorba soudu v Aristotelově logice má velmi blízko k počítání. Aristotelova logika je teorií aritmetického typu, což se projevuje tím, že *Aristotelova logika nemá ontologickou redukci*, a proto její skladební syntéza navazuje přímo na relační syntézu, na spojení subjektu a predikátu. Výroky se dělí na pozitivní (A je B) a negativní (A není B). Slova „je" a „není" se nazývají spony, přičemž ve variaci spony lze spatřovat náznak skladební syntézy. Spona spojuje pojem A s pojmem B – a toto spojení může být pozitivní nebo negativní; záleží jen na tom, zda objekty A počítáme k objektům B, nebo ne.

Frege zavedl ontologickou redukci, když za elementární výrok považoval propozici $P(a)$, složenou z predikátu P a jména a. To vedlo k novému chápání negace, tedy k pojetí, v němž jsou všechny elementární výroky pozitivní a negace se stává logickou spojkou popírající celé tvrzení. Aristotelovo „A není B" Frege nahrazuje tvrzením „Není pravda, že A je B". Negace se tak připojuje k polyadické kvantifikaci. Dalším prvkem, který Frege přidává, je pak implikace.

Kvantifikace, negace a implikace společně umožňují vytvořit řadu formulí, které ilustrují skladební syntézu Fregeho logiky. Větu „Každý kůň je savec", kterou Aristotelés považoval za vztah dvou pojmů, Frege analyzuje jako $(\forall x)(K(x) \Rightarrow S(x))$, tedy pro každý předmět x platí, pokud je x kůň, pak je x savec. Tam, kde Aristotelés viděl elementární výrok, tj. dále neanalyzovatelné spojení dvou pojmů, Frege vidí výrok složený ze dvou elementárních výroků (jeden výrok je $K(x)$, druhý je $S(x)$) spojených implikací.

2.5 Změna deduktivní syntézy jazyka

Když chce aristotelik dokázat nějakou obecnou větu, například že *Každé A je B*, hledá „střední člen", tedy nějaké C, pro které by bylo možné dokázat jednak, že „Každé A je C", a také že „Každé C je B". Pak může pomocí sylogismu první figury prvního modu dospět k tomu, že „Každé A je B". Aristotelova logika nás tedy vede k hledání prostředního členu. Je zajímavé porovnat Aristotelův postup s deduktivní praxí Eukleidových *Základů*. Když chce Eukleidés dokázat obecnou větu, volí v prvním kroku důkazu, který se nazývá *ekthesis*, konkrétní geometrický reprezentant. Například v důkazu věty I. 47 píše: „Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem BAC, tvrdím, že čtverec nad BC se rovná čtvercům nad BA a AC."[25]

Eukleidés tedy zvolí *konkrétní objekt* (nikoli obecný pojem), a teprve o něm dokazuje, že má vlastnost, kterou vyslovil pro všechny pravoúhlé trojúhelníky. Eukleidés tedy už 21 století před Fregem pochopil, že k důkazu, že každé A je B, stačí dokázat, že každé x, které je A, je také B. Za tímto účelem zvolil konkrétní a, které je A, a snažil se o něm dokázat, že je také B. Pokud nepoužil žádnou speciální vlastnost objektu a, lze a v důkazu nahradit libovolným b, které je také A, takže věta platí obecně. Již Eukleidés tedy chápal, že to, co Aristotelés považoval za elementární, dále nerozložitelný výrok „Každé A je B", je ve skutečnosti výrok složený z výroků „*a* je A", respektive „*a* je B", spojených vztahem vyplývání, přesně tak jako tvrdí Frege.

V počtech má deduktivní syntéza jazyka podobu *kalkulativních pravidel*, která spojují jednotlivé kroky do uceleného výpočtu. Pomocí nich postupujeme od zadání k řešení. V matematice má naopak deduktivní syntéza podobu pravidel usuzování, která spojují jednotlivé kroky logické argumentace do celku deduktivního důkazu. Když tvrdíme, že jazyk počtů má deduktivní

25 Šír, Z. (ed.), *Řecké matematické texty*, c.d., s. 131.

syntézu odlišnou od deduktivní syntézy jazyka matematiky, a když současně tvrdíme, že deduktivní syntézou jazyka matematiky je logické odvozování, nechceme tím naznačit, že schémata deduktivní syntézy jazyka počtů jsou nelogická. Kalkulativní pravidla jsou platná. Tvrdíme o nich pouze to, že jsou omezená.

Naší tezí je, že deduktivní syntéza jazyka sylogistické logiky, která má podobu seznamu platných sylogismů, má blíže k deduktivní syntéze jazyka počtů než k deduktivní syntéze jazyka matematiky. Když charakterizujeme deduktivní syntézu jazyka Aristotelovy logiky jako aritmetickou, máme na mysli dvě věci. Za prvé, že pomocí teorie sylogismů lze odvodit pouze omezený fragment množiny logicky platných soudů. A za druhé, že deduktivní syntéza jazyka teorie sylogismů je aritmetická také v tom smyslu, že vztahy vyjádřené sylogismy lze ověřit výčtem možností.

2.6 Shrnutí

Přechod od Aristotelovy k Fregeho logice jsme charakterizovali pěti změnami: 1. *Změnou fenomenální redukce*: podle Aristotela lze každé tvrzení redukovat na spojení subjektu a predikátu. *Frege nahradil subjekt-predikátovou stavbu soudu stavbou složenou z funkcí a argumentů*. Subjekt je pouze jedním z argumentů. 2. *Změnou relační syntézy*: podle Aristotela ve výroku kvantifikujeme subjekt, aristotelská kvantifikace je proto monadická. Podle Fregeho lze jakýkoli prvek výroku nahradit písmenem a svázat kvantifikátorem. *Frege nahradil monadickou kvantifikaci kvantifikací polyadickou*. 3. *Změnou ontologické redukce*: Aristotelés chápal elementární výrok jako vztah dvou pojmů. *Frege elementární výrok pochopil jako vztah pojmu a jména.* Predikace je tedy podle Fregeho ontologicky ukotvena v doméně prvků, k nimž jména referují. Tím se aristotelský elementární výrok rozpadl na dva výroky spojené implikací. 4. *Změnou skladební syntézy*: Aristotelova logika nezná složené výroky. Kromě kvantifikace (která je aspektem relační syntézy) vlastně jediným atributem, který aristotelská logika rozlišuje, je dělení výroků na pozitivní a negativní podle toho, zda ve výroku subjektu predikát přisuzujeme, nebo upíráme. Frege nahradil Aristotelovo chápání negace jako vlastnosti spony chápáním negace jako logické spojky. Tím se k polyadické kvantifikaci (bod 2) a implikaci (bod 3) přidává negace (bod 4), čímž získáváme tři prvky, pomocí kterých *Frege vytváří skladební syntézu jazyka logiky*. Jejich kombinace umožňují vyjádřit jakýkoli pojem používaný v matematice jeho doby. 5. *Změnou deduktivní syntézy*: Deduktivní syntézu Aristotelovy logiky tvoří teorie sylogismů. Protože Aristotelova logika měla minimální skladební syntézu, rozlišoval Aristotelés řadu různých platných sylogismů. Frege naproti tomu zavedl implikaci a negaci jako prvky skladební syntézy, přičemž skládání argumentů do deduktivních řetězců tvořících důkaz se děje pomocí jediného pravidla *modus ponens*. Všechna ostatní pravidla usuzování Frege vyjadřuje jako formule svého jazyka.

Popsali jsme pět změn, které ukazují, že Frege při konstrukci své logiky nezačal *ab ovo*, ale vycházel z Aristotelovy logiky. Tím můžeme Kolmanův problém považovat za vyřešený. V rámci analýzy Fregeho reformy logiky není obtížné zjistit, z čeho vychází: Aristotelská tradice představuje její přirozené východisko. Obtížnější je uvědomit si, jak Frege s aristotelskou tradicí zachází. Teprve když si uvědomíme, že jde o změnu relační, skladební a deduktivní syntézy jazyka, stane se povaha Fregeho reformy srozumitelnou.

3. Fregeho zavedení skladební syntézy do jazyka logiky

Aristotelská logika disponovala fenomenální redukcí i relační a deduktivní syntézou. Z tohoto důvodu lze při výkladu těchto aspektů jazyka Fregeho přínos považovat za modifikaci Aristotelovy koncepce. Ontologická redukce a skladební syntéza se naproti tomu v Aristotelově logice nevyskytují. Proto je důležité prozkoumat je podrobněji. Ontologická redukce není technicky tak složitá – spočívá v zavedení symbolů pro jména a pro predikáty a následně pak i pravidel, jak se tyto symboly kombinují. Zavedení skladební syntézy je technicky složitější. Fregeho skladební syntéza jazyka logiky je tvořena kombinací tří prvků – kvantifikace, implikace a negace.

Aristotelova sylogistika nemá skladební syntézu, všechny její soudy jsou dvousložkové. Frege tím, že v predikaci odhalil skrytou implikaci, oddělil negaci od spony a postavil ji před propozici, zavedl do logiky skladební syntézu. Základní operace Fregeho skladební syntézy – kvantifikace, implikace a negace – byly ukryty uvnitř Aristotelova elementárního soudu. Oproti Aristotelovi tak Frege jde ve své analýze o úroveň hlouběji – a na této hlubší úrovni se výrokový počet vyjevuje jako nástroj skladební syntézy. Tato skutečnost bývá často zkreslována, neboť ve výuce logiky se začíná výrokovým počtem a predikátový počet je prezentován jako zjemnění analýzy, kdy se výrok dále rozkládá na predikát a jeho argumenty. Úroveň výrokového počtu se tedy nachází jakoby na povrchu a vztahy predikace jsou skryty uvnitř výroků, s nimiž operuje výrokový počet. Frege však v aristotelské predikaci našel jak implikaci, tak negaci. Stoická výroková logika stojí tedy „nad“ Aristotelem (tak, jak je prezentována ve výuce logiky), ale Fregeho výrokový kalkul se nachází „pod“ Aristotelem (je o jednu úroveň hlubší vrstvou analýzy). Shodou okolností to, co stojí nad Aristotelem, je totéž, co se nachází pod ním. To vede k mylnému závěru, že Frege spojil stoickou logiku s logikou aristotelskou. To ale není pravda. Frege objevil novou vrstvu logických vztahů pod

Aristotelovou logikou, která byla totožná se stoickou logikou pouze shodou okolností.

Když Frege změnil ***kvantifikaci***, provedl vlastně tři různé úkony. Za prvé *„osvobodil"* kvantifikaci od jejího spojení se subjektem, v němž existovala v rudimentární podobě jako monadická kvantifikace. Poté ji *„rozšířil"* na ostatní členy věty, čímž změnil aristotelskou monadickou kvantifikaci subjektu na polyadickou kvantifikaci argumentů. Nakonec kvantifikaci *„zabudoval"* do skladební syntézy jazyka tím, že určil, že oborem kvantifikace je podformule. (Aristotelova logika neměla skladební syntézu, takže neznala ani podformule.)

Podobně když Frege změnil ***negaci***, *„osvobodil"* ji od spojení se sponou (u Aristotela mohla být v každé propozici nejvýše jedna negace, a propozice se tak dělily na pozitivní a negativní). Následně negaci *„rozšířil"* na celou formuli, v důsledku čehož může mít formule více negací (analogicky ke kvantifikaci bychom mohli říci, že Frege změnil aristotelskou monadickou negaci na polyadickou). Nakonec negaci *„začlenil"* do skladební syntézy jazyka tím, že určil, že oborem negace je podformule.

A nakonec: když Frege změnil ***implikaci***, *„vysvobodil"* ji z její skrytosti. Pro Aristotela byla implikace skryta v predikaci chápané jako spojení dvou pojmů. Následně Frege implikaci *„rozšířil"*, když zavedl implikaci mezi celými propozicemi (analogicky ke kvantifikaci bychom tedy mohli říci, že Frege změnil aristotelskou monadickou implikaci, která byla implicitně obsažena v predikaci, na polyadickou v tom smyslu, že jedna propozice může obsahovat více implikací). Nakonec implikaci *„začlenil"* do skladební syntézy jazyka tím, že určil, že implikace je vztah mezi dvěma podformulemi.

Tato rekonstrukce je pozoruhodná mimo jiné proto, že ukazuje, že všechny složky tvořící skladební syntézu jazyka Fregeho logiky *byly přítomny již v Aristotelově logice*. Implikace byla sice skrytá, ale každý, kdo čte sylogismus BARBARA, cítí, že jde o řetězení dvou implikací, i když to tak na první pohled nevypadá. Možná ještě pozoruhodnější je, že u Aristotela byly kvantifikace, negace a implikace skutečně přítomny, ale pouze v omezené podobě, a z tohoto důvodu *nevytvořily žádnou skladební syntézu*. To bylo způsobeno tím, že kvantifikován byl subjekt, negována byla spona a implikace byla skryta v predikaci. Frege tyto složky osvobodil ze sevření, které bránilo vzájemným kombinacím a vytváření bohatství formulí matematické logiky.

4. Principy, kterými se Frege řídil při reformě logiky

Po výkladu Fregeho reformy logiky se můžeme pokusit popsat principy, kterými se Frege na cestě k matematické logice řídil. Pět změn nastíněných v oddíle 2 do sebe totiž pozoruhodným způsobem zapadá.

4.1 Upřednostňoval matematický diskurz před běžným jazykem

Snad nejvýraznější rozdíl mezi Aristotelovou a Fregeho logikou reprezentuje oblast, jejímž teoretickým rozborem oba autoři dospěli ke svým systémům. Zatímco Aristotelés vytvořil logiku jako nástroj pro analýzu běžného uvažování (pokud lze to, co rozvíjeli sofisté, tímto způsobem označit), Frege se naproti tomu rozhodl při hledání principů logické argumentace vycházet z analýzy argumentační praxe matematiky. Zdá se, že konfrontace logiky s argumentační praxí matematiky vedla Fregeho k poznání, že subjekt-predikátová stavba soudu je pro potřeby logiky nevhodná. Proto *první zásadou*, kterou se při reformě logiky Frege řídil, bylo *upřednostnění argumentační praxe matematického diskurzu před běžným jazykem*.

4.2 Reprezentoval stavbu pojmů a nejen vztahy mezi pojmy

Aristotelská logika chápala pojmy jako cosi daného. Aristotelés zkoumal vztahy mezi pojmy, ale neanalyzoval jejich stavbu. Pojmy si představoval jako soubory rysů, jejichž přidáváním a ubíráním se lze mezi pojmy přirozeně pohybovat. Problém spočívá v tom, že z hlediska matematiky takto chápaným pojmům chybí dostatečná expresivní síla. Naproti tomu Frege vytvářel svoji logiku jako *pojmové písmo*, tedy jako nástroj umožňující analyzovat stavbu pojmů. Pojem pro Fregeho není čímsi jednoduchým, daným jako soubor rysů. Frege se snaží pochopit, jak pojmy vystupují v argumentační praxi matematiky.

Matematika ale nepředstavovala pouze inspiraci Fregeho projektu formalizace logiky, nebyla jen modelem argumentační praxe, podle které Frege svůj logický systém budoval. Matematika byla současně i předmětem Fregeho reformy. Frege byl nespokojen se stavem aritmetiky, s jejími principy a definicemi. Z tohoto důvodu zformuloval *logicismus* jako program, který vycházel z předpokladu, že aritmetika nemá vlastní předmět zkoumání, protože pojem čísla je zcela obecný – počítat lze prakticky všechno. Podle Fregeho neexistují ani specifické aritmetické postuláty, ani specifické aritmetické definice. Základní principy a pojmy aritmetiky jsou principy a pojmy nejširší možné platnosti, jsou tedy koextenzivní s principy logiky. Aby mohl projekt logicismu realizovat, musel Frege kromě upřesnění principů a pojmů logiky ukázat, že je možné základní pojmy aritmetiky, a především pojem čísla, definovat pomocí logických prostředků. Svůj systém formální logiky proto vybudoval jako nástroj sloužící k analýze stavby pojmů aritmetiky. Proto je důležité omezení kvantifikace a negace na podformule, které mohou představovat různé komponenty pojmu. *Druhým principem* Fregeho reformy logiky proto bylo *reprezentovat stavbu pojmů, a nejen vztahy mezi nimi*.

4.3 Zvolil jazyk aritmetiky jako vzor pro pojmové písmo

Zpočátku nám připadalo Fregeho rozhodnutí zvolit jazyk aritmetiky jako vzor pro budování „formulového jazyka čistého myšlení" absurdní. Vždyť to byla geometrie, která se v Eukleidových rukou stala vzorem exaktního myšlení. Jazyku aritmetiky chybí skladební syntéza, takže když bude Frege svou logiku budovat po vzoru jazyka aritmetiky, dopadne jako Aristotelés – vytvoří logiku, jež bude příliš slabá. Frege si nicméně jako vzor pro svoji logiku zvolil jazyk aritmetiky – a je třeba porozumět tomu, jak je to možné. Odpověď odložíme do kapitoly 4.4, ale její část spočívá v tom, že Frege nechápal aritmetiku v úzkém slova smyslu jako disciplínu, která se zabývá řešením úloh pomocí manipulace s čísly, a proto nestojí v protikladu k algebře a k diferenciálnímu a integrálnímu počtu. Aritmetiku chápal široce a algebru a diferenciální a integrální počet do ní zahrnoval. Můžeme si připomenout citát z úvodu tohoto textu: Frege v podstatě ztotožnil aritmetiku s celou symbolickou matematikou.

I takto široce pojatá aritmetika nicméně stále stojí v protikladu ke geometrii. Naši otázku můžeme tedy upřesnit a ptát se, proč se Frege při budování logiky uchyluje k symbolické matematice, a nikoli ke geometrii. Jednou z možných odpovědí je, že formule symbolické matematiky, na rozdíl od geometrických obrázků, máme sklon považovat za součást jazyka. Částečně je to dáno tím, že se algebraické formule zrodily formalizací verbálních zápisů, a proto dokážeme formule číst (jsou sekvenční, podobně jako běžný jazyk). Geometrický obrázek stejným způsobem přečíst neumíme. Volbou *symbolického* jazyka jako vzoru se proto součástí pojmového písma stávají nejen *pravidla logického usuzování* (která jsou pro takto široce pojatou aritmetiku a pro geometrii identická a která bychom mohli odvodit z geometrie stejně jako z aritmetiky), ale také *pravidla konstrukce symbolických reprezentací* (která z geometrie převzít nelze, neboť pravidla konstrukce geometrických reprezentací, daná Eukleidovými postuláty, nelze jednoduše zabudovat do jazyka). Frege tak přebírá z aritmetiky nejen pravidla logické argumentace, ale i pravidla symbolické konstrukce.

Přestože se Frege řídil vzorem aritmetiky, to, co vytvořil, není jazyk symbolický, nýbrž geometrický. Fregeho formule mají podobu obrázků či diagramů. Na první pohled by se tedy mohlo zdát, že byl Fregeho projekt neúspěšný. Přestože chtěl postupovat podle vzoru jazyka aritmetiky, výsledek se podobá spíše geometrii. Proč Frege tvrdí, že napodobuje aritmetiku, když kreslí obrázky? V jakém smyslu je to, co vytvořil, formulovým jazykem čistého myšlení vytvořeným podle vzoru jazyka aritmetiky? Co vlastně Frege z aritmetiky převzal? Podle všeho převzal *metaforu logické argumentace jako výpočtu*, a možná právě ta představuje základní obraz, podle kterého je pojmové písmo vytvořeno. *Třetím principem*, podle něhož se Frege při budování logiky řídil, tedy bylo *modelovat logickou argumentaci podle vzoru výpočtu jako posloupnost symbolických úprav podřízených explicitním pravidlům*.

4.4 Z aritmetiky převzal způsob zaznamenání symbolických úprav

Další aspekt, ve kterém Fregeho logika napodobuje aritmetiku (jak Frege explicitně uvádí), spočívá ve způsobu používání písmen. Jedná se o napodobování jazyka algebry, nikoli jazyka aritmetiky, neboť jazyk aritmetiky žádná písmena neobsahoval. Je sice pravda, že písmena zavedl Diofantos v knize *Aritmetika*, ale tato kniha se považuje za jeden ze zdrojů algebry. Frege reprezentuje logické vztahy pomocí geometrických diagramů, které mají podobu grafu – konečného binárního stromu, který má několik vrcholů spojených hranami tří druhů. Frege je nazývá obsahová čára (Inhaltsstrich), podmínková čára (Bedingungsstrich) a popírací čára (Verneinungsstrich). Tyto formule sice na první pohled symbolický jazyk aritmetiky nepřipomínají, ale přesto jsou vytvořeny podle jejího vzoru (nebo přesněji, podle vzoru jazyka algebry). Vzorem však nejsou algebraické vzorce, ale *způsob záznamu algebraických úprav*.

Když v algebře upravujeme určitý výraz nebo řešíme rovnici, *jednotlivé kroky píšeme pod sebe*. A stejnou podobu má i pravá strana Fregeho diagramu. Při algebraických úpravách zůstávají užitá pravidla zpravidla implicitní. Úpravy se často zjednodušují tak, že se několik kroků sloučí do jednoho, neboť celý proces je často zdlouhavý a nudný. Cílem Fregeho kalkulu je tuto otravnou nudu učinit explicitní. Frege navíc plně zexplicitňuje důvody, které nás opravňují jednotlivé kroky algebraických úprav učinit. Jednotlivé řádky výpočtu tak představují vrcholy grafu a struktura grafu ukazuje všechny předpoklady a pravidla, která daný „výpočet" opravňují. Samozřejmě, žádný skutečný výpočet nemá Fregem požadovanou „logickou formu", neboť předpoklady jsou zamlčeny, pravidla jsou implicitní a uvádějí se ve zjednodušené podobě a na přeskáčku. To je však chyba matematiků, nikoli Fregeho. Fregeho kalkul je geniální. Je to „formulový jazyk čistého myšlení vytvořený podle vzoru praxe algebraického odvozování" („*eine der Praxis der algebraischen Ableitungen nachgebildete Formelsprache des reinene Denkens*").

Binární strom je struktura implicitně skrytá v posloupnosti algebraických úprav, kterou Frege činí explicitní.[26] Jazyk algebry je silnější než jazyk eukleidovské geometrie, a proto všechny námitky proti takto pojatému pojmovému písmu z úvodu této eseje pozbývají platnost. Budovat pojmové písmo podle vzoru algebry je oprávněné, neboť jazyk algebry má větší logickou,

26 Ten strom je binární, neboť algebraické operace, jako sčítání či odčítání, jsou binární.

expresivní, explanatorní a integrativní sílu než jazyk aritmetiky.[27] Za *čtvrtý princip* Fregeho reformy logiky lze proto považovat zásadu, na jejímž základě je třeba *převzít z algebry způsob zaznamenání algebraických úprav*.

4.5 Subjekt-predikátovou analýzu soudu nahradil argumentově-funkcionální analýzou

Frege zvolil jazyk aritmetiky jako vzor pro logiku ještě z dalšího důvodu: z hlediska chápání univerza objektů. Právě proto, že východiskem byl jazyk aritmetiky, vyhnul se komplikacím, které přináší skladební syntéza jazyka geometrie. Nebylo nutné uvádět podmínky, za kterých lze učinit určitý krok konstrukce. Stačí přidávat jednotky a postupně získáme všechna čísla. Nebylo nutné zavádět vícesortový jazyk, jako to činil Eukleidés, který rozeznával tři druhy objektů – body, úsečky a kružnice. V aritmetice existuje jediný druh objektů – čísla. Frege však nepřišel o výhody, které geometrii dodává skladební syntéza jejího jazyka. Frege komplexnost, jíž se vzdal volbou čísel jako univerza objektů, opětovně vnesl do logiky tím, že nahradil subjekt-predikátovou stavbu soudu stavbou argumentově-funkcionální.

Eukleidovská skladební syntéza, která funguje na úrovni objektů a je založena na konstrukci pomocí kružítka a pravítka, totiž není jediným druhem skladební syntézy v matematice. Více než tisíc let po Eukleidovi se zrodila symbolická algebra a po ní analytická geometrie, ve které existuje jediný druh objektů – body. Přímka je zavedena jako geometrické místo bodů zadané pomocí lineární formy a kružnice je zavedena jako geometrické místo bodů zadané pomocí kvadratické formy.[28] Přitom jazyk analytické geometrie dokáže modelovat všechny prvky skladební syntézy eukleidovské geometrie. Dvě přímky jsou rovnoběžné, pokud vektory vytvořené z koeficientů příslušných lineárních forem jsou závislé. Bod leží uvnitř kruhu tehdy, když jeho souřadnice, po dosazení do příslušné kvadratické formy, dají zápornou hodnotu.

Takto lze přeložit všechny druhy vzájemné polohy geometrických objektů do jazyka analytické geometrie, takže tento jazyk disponuje skladební syntézou, která převyšuje možnosti eukleidovské geometrie. Lineární a kvadratické formy, jimiž analytická geometrie modeluje objekty syntetické geometrie, jsou vlastně lineární a kvadratické funkce. Frege tím, že propozice definoval jako výrazy složené z funkce a argumentů, fakticky do jazyka logiky integro-

27 Možná by bylo vhodné požádat vydavatele Fregeho díla, aby opravili podtitul spisu *Begriffsschrift* na „*Eine der algebraischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*“. Více by to odpovídalo skutečnosti a bylo by to méně matoucí.

28 Přímka je v analytické geometrii dána rovnicí $ax + by + c = 0$. Výraz $ax + by + c$ sa nazývá lineární forma.

val (nebo *propašoval*) skladební syntézu jazyka matematiky v její plné síle. Skladební syntézu nicméně nevytváří na úrovni objektů a složitý geometrický útvar neuchopuje prostřednictvím jeho konstrukce, ale skladební syntézu zavádí na úrovni výrokových forem a složitý geometrický objekt uchopuje pomocí složité formy.

Když Frege modeloval univerzum objektů své logiky podle vzoru aritmetiky, nic tím neztratil. Matematický druh skladební syntézy vnesl do jazyka logiky na úrovni vět jejich rozkladem na funkci a argumenty. Když si uvědomíme, že pojem funkce je základním pojmem jazyka matematické analýzy, což je jazyk s vyšší logickou, expresivní, explanatorní a integrativní silou než jazyk algebry, vidíme, že díky rozkladu propozic na funkce a argumenty mají propozice Fregeho logiky skladební syntézu, která umožňuje definovat matematické pojmy a analyzovat matematické argumenty. Aristotelés byl v podobné situaci jako Frege. Také jeho logika modeluje univerzum objektů jako univerzum s triviální skladební syntézou.[29] Ale na rozdíl od Fregeho Aristotelés nevnesl do své logiky dodatečnou skladební syntézu na úrovni propozic. Jazyk Aristotelovy logiky zůstal omezen na triviální skladební syntézu, a proto je Aristotelova logika aritmetická, a nikoli matematická. Skladební syntéza jejího jazyka je skladební syntézou počtů. Naproti tomu skladební syntéza jazyka Fregeho logiky je matematická, neboť obsahuje pojmy funkce a argument. Za *pátý princip* Fregeho reformy logiky lze proto považovat princip, že *univerzum objektů má být jednosortové a prosté skladební syntézy, přičemž skladební syntézu je třeba zavést na úrovni propozic nahrazením subjekt-predikátové analýzy soudu analýzou argumentově-funkcionální*.[30]

4.6 Ostře oddělil logické od psychologického

V úvodu *Základů aritmetiky* Frege formuluje princip, podle něhož „je třeba ostře oddělovat psychologické od logického, subjektivní od objektivního".[31]

29 Samozřejmě, přiléhavější by bylo říci, že Frege je na tom podobně jako Aristotelés. Tak či onak, zde definujeme další aspekt, ve kterém Frege navazuje na Aristotela. Za intendované univerzum pro svoji logiku volí, podobně jako Aristotelés, univerzum aritmetického typu, tedy univerzum bez vlastní skladební syntézy.

30 V oddílech 4.3, 4.4 a 4.5 jsme zjistili, že Frege považoval formulový jazyk „aritmetiky" za vzor při konstrukci pojmového písma ve třech rozdílných smyslech. Jednak jako vzor pro chápání argumentace jako symbolické manipulace (podle vzoru *aritmetiky*), dále jako vzor pro spojování argumentů do celku (tj. jako deduktivní syntézu modelovanou podle *algebraických* úprav) a konečně jako vzor pro univerzum objektů (tj. jako vzor skladební syntézy, kterou do jednosortového univerza vnesl z *matematické analýzy*).

31 Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, c.d. Český překlad Jiřího Fialy in: Frege, G., *Logická zkoumání. Základy aritmetiky*, c.d., s. 152.

Aristotelés chápal logiku jako analýzu lidského myšlení. Logika byla zaměřená na to, jak lidé myslí, nebo jak by myslet měli. Logika se týkala aktů usuzování reálného či ideálního subjektu. Podle Fregeho je ale logika objektivní vědou, která se zabývá vztahy vyplývání mezi propozicemi. Zda propozice A plyne z propozice B, je objektivní vztah, který nezávisí na tom, zda někdo někdy propozici A z propozice B reálně odvodil, nebo nikoli. Vyplývá-li propozice A objektivně z propozice B, může to být důvodem, abychom uznali, že pokud někdo propozici A odvodil z propozice B, usuzoval správně. Ale platnost vztahu mezi propozicemi A a B nezávisí na uskutečnění příslušného psychologického aktu. *Šestým principem* Fregeho reformy je princip, podle kterého jsou *předmětem logiky vztahy mezi propozicemi, které jsou objektivní a nezávisí na psychických aktech konkrétních či ideálních psychologických subjektů*.

4.7 Význam slova určoval v kontextu věty, a nikoli odděleně

V *Základech aritmetiky* Frege zformuloval princip kontextuality: „Na význam slov je třeba se ptát v souvislosti věty, a nikoli v jejich izolaci“.[32] Jako ilustraci tohoto principu lze vzít vztah $2^4 = 16$. Tento vztah můžeme analyzovat tak, že 2 je objekt a $x^4 = 16$ je predikát (říkající, že 2 je čtvrtá odmocnina ze šestnácti), nebo tak, že 4 je objekt a $2^y = 16$ je predikát (říkající, že 4 je dvojkovým logaritmem ze šestnácti). V prvním případě je 2 předmět a 4 je součástí pojmu (indikátorem toho, o kterou odmocninu se jedná). Ve druhém případě je 4 předmět a 2 je součástí pojmu (indikátorem základu, vůči němuž je logaritmus počítán). Zda ve vztahu $2^4 = 16$ dvojka označuje předmět, nebo je součástí pojmu, je dáno způsobem analýzy.[33]

Princip kontextuality má několik aspektů. Na jednu stranu jej lze považovat za *povýšení triku na princip*. Protože Frege vnesl skladební syntézu do logiky až na úrovni propozic (a nebudoval ji od termů a predikátů), mohl objekty a predikáty identifikovat teprve na této úrovni. Bez ní mělo jeho univerzum velmi omezenou skladební syntézu. Při konstrukci objektů Fregeho jazyk žádnou skladbu nezná a teprve na úrovni propozic získává jazyk logiky schopnost tvořit složitější konstrukce. Povýšení triku na princip však není jediným možným výkladem principu kontextuality. Fregeho logika je realizací Leibnizova snu o univerzálním jazyce. Leibniz charakterizoval univerzální jazyk zcela abstraktně jako nástroj pro manipulaci se symboly, ale nedokázal o něm říci nic konkrétního (na rozdíl od Emila Posta, Andreje Markova, Alonza Churcha, Kurta Gödela, či Alana Turinga, což jsou tvůrci teorie algoritmů).

32 Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, c.d. s. 152.
33 Macbeth, D., *Frege's Logic*. Cambridge, MA, Harvard University Press 2005, s. 188, pozn. č. 3.

Frege objevil polohu mezi zcela obecnou univerzální charakteristikou a diferenciálním a integrálním počtem, což byl nejobecnější jazyk, který matematika do té doby vytvořila. Právě k fixování této mezipolohy slouží princip kontextuality. Jazyk ležící na škále obecnosti mezi jazykem matematické analýzy a jazykem teorie algoritmů Frege popsal pomocí operací, které zachovávají pravdivostní hodnotu propozic.[34] Proto jsou prvními prvky nového jazyka propozice a pravidla zachovávající jejich pravdivost.

Je tedy možné, že princip kontextuality, podle něhož je význam slova nutné odvozovat na základě analýzy celé věty, nemá věcné opodstatnění, nýbrž představuje důsledek Fregeho triku, kdy za univerzum objektů považoval jednosortové univerzum bez skladební syntézy a skladební syntézu zavedl do jazyka logiky až na úrovni propozic. Tím získal nástroj analýzy až na této úrovni. Proto je možné, že první věta Wittgensteinova *Traktátu* je jen ozvěnou tohoto Fregeho triku a nemá žádnou filosofickou hloubku. Pouze proto, že se Frege rozhodl skladební syntézu jazyka zavést až na úrovni vět, jsou fakta primární a předměty odvozené. To ale nemá žádné ukotvení ani ve struktuře světa, ani v povaze myšlení, ani v charakteru jazyka. Je to důsledek triku, geniálního, efektivního, ale přece jen kontingentního triku, jenž umožňuje budovat logiku tímto způsobem.

Jinou možností je, že pomocí principu kontextuality Frege vymezil úroveň mezi Leibnizovou univerzální charakteristikou a diferenciálním a integrálním počtem. V takovém případě by to nebyl geniální trik, ale úspěšná heuristika. Ale po vybudování predikátového počtu je možné ji opustit – takže platí, že princip kontextuality nemá věcné opodstatnění a není nutné z něj vyvozovat žádné závěry. Každopádně za *sedmý princip* Fregeho reformy lze považovat princip kontextuality, podle něhož je třeba *význam slov určovat v kontextu věty, nikoli odděleně.*

5. Závěr

Porovnáním jazyka Aristotelovy logiky s Fregeho logikou se podařilo identifikovat posloupnost pěti změn vedoucích od změny fenomenální redukce až po změnu deduktivní syntézy. Předložili jsme také devět kroků, které popisují, jak Frege osamostatnil kvantifikaci, implikaci a negaci (ty byly v Aristotelově logice přítomny pouze v rudimentární podobě) a s jejich pomocí zavedl skladební syntézu. Našli jsme tak řešení Kolmanova problému, které navíc umožňuje porozumět tomu, proč Frege jako základní logické spojky volí

34 Fregeho logiku lze tak uvést do souvislosti s Kleinovým *Erlangenským programem* z roku 1872. Klein popsal různé geometrie pomocí transformací, vůči nimž jsou invariantní. Takže zde je jistá nepopiratelná příbuznost.

právě implikaci a negaci. Kromě toho jsme získali záchytné momenty, které můžeme použít při vypracování projektu formální epistemologie. Jednak se můžeme v epistemologii pokusit napodobit některé z pěti změn, které Frege učinil v logice. Můžeme se ale také pokusit do epistemologie přenést některé z devíti kroků, pomocí kterých vytvořil její skladební syntézu. Věříme, že tak získáme základ, o který se bude možné v reformě epistemologie opřít.