

O metafoře světla ve Vopěnkových „Meditacích“¹

Zuzana Haníková

Ústav informatiky AV ČR, v. v. i., Praha

hanikova@cs.cas.cz

Abstract:

On the Metaphor of Light in Vopěnka's "Meditations"

What situations do the specific concepts of Petr Vopěnka's Alternative Set Theory relate to? Using the metaphor of illumination, utilized bountifully in his *Meditations on the Foundations of Science*, this article analyzes some of the methods of Vopěnka's mathematization of the world, which proceeds from individual situations to the description of abstract structures and is based on our active participation. At the same time, the article draws attention to some of the mathematical sources of Vopěnka's Alternative Set Theory. It aims to obtain a more tangible imprint of how specific alternative foundations of mathematics are established, proceeding from Vopěnka's own account of this process. This includes an outline of the position of Vopěnka's *Meditations* within the context of his work.

Keywords: Petr Vopěnka, Alternative Set Theory, axiomatic theory, horizon, sharpness, abstraction

DOI: <https://doi.org/10.46854/fc.2025.4r.611>

1. Vopěnkovy texty a jejich čtení

Výchozím textem tohoto článku jsou Vopěnkovy *Meditace o základech vědy* z r. 2001.² Kniha rozvíjí dvě významné linie jeho předchozí práce, které spolu do určité míry souvisejí a témata v jejich překryvu jsou pro *Meditace* centrální. Jde v první řadě o výdobytky jeho Alternativní teorie množin. Tato teorie je vyložena v *Úvodu do matematiky v alternativní teorii množin*³ z r. 1989

1 Děkuji dvěma anonymním recenzentům *Filosofického časopisu* za připomínky, kterými přispěli k vylepšení textu.

2 Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*. Praha, Práh 2001. Dále citováno jen jako *Meditace*.

3 Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternativní teorii množin*. Prel. P. Zlatoš. Bratislava, Alfa 1989.

a v předchozí stručnější anglicky publikované *Mathematics in the Alternative Set Theory*⁴ z r. 1979; ta je již sama výsledkem mnohaleté soustředěné práce Vopěnky a jeho pracovní skupiny.⁵ Dále budu čerpat z článku „The Philosophical Foundations of Alternative Set Theory“,⁶ jehož text byl poprvé uveřejněn v r. 1989 ve sborníku z konference věnované právě Alternativní teorii množin. Druhou podstatnou linií je Vopěnkův soustředěný zájem o geometrii, který vyústil v *Rozpravy s geometrií*, vydávané po částech od r. 1989; souborné vydání *Rozprav* je z r. 2003.⁷ Doplnkovým zdrojem je i *Vyprávění o kráse novobaroční matematiky* z r. 2004.⁸

Kniha *Mathematics in Alternative Set Theory* je převážně koncipována jako odborná matematická monografie. V porovnání s pozdějšími texty vyznívá stroze⁹ – v úvodu se Vopěnka vymezuje vůči pojetí nekonečna v klasické teorii množin, podstatně však nevybočuje ze stylu prezentace v matematice obvyklého. Materiál této anglické knížky je pokryt v *Úvodu do matematiky v alternativní teorii množin*, ten je však již obsáhlejší, cílí na širší čtenářskou obec a vopěnkovskou matematiku podává didakticky, včetně mnoha úvah a historických exkurzů. Článek „The Philosophical Foundations of the Alternative Set Theory“ by bylo možné považovat za manifest, tudíž odborný text v oboru filosofie matematiky. V případě dalších jmenovaných publikací je postupem času čím dál patrnější, že o ryze odborné texty nejde; některé

4 Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Transl. by P. Hájek. Leipzig, Teubner 1979.

5 V obou knihách uvádí Vopěnka své spolupracovníky jmenovitě. Např. v *Mathematics in the Alternative Set Theory* jde o podstatnou spolupráci A. Sochora, K. Čudy a J. Mlčka, studentů M. Resla, A. Vencovské nebo J. Chudáčka, a motivační působení J. Polívky. Další publikace včetně některých Sochorových také uvádějí aktuální spolupracovníky.

6 Vopěnka, P., The Philosophical Foundations of Alternative Set Theory. *International Journal of General Systems*, 20, 1991, No. 1, s. 115–126. Obdobný text dříve publikován jako „What Is the Alternative Set Theory All About“. In: *Proceedings of the 1st Symposium Mathematics in the Alternative Set Theory* (held in Stará Lesná on May 28 – June 4, 1989). Eds. by J. Mlček – M. Benešová – B. Vojtášková. Bratislava, Association of Slovak Mathematicians and Physicists (JSMF) 1989. Česky vyšel jako: Vopěnka, P., O co jde v alternativní teorii množin. In: Fiala, J. (ed.), *Horizonty nekonečna. Matematický pohled na svět*. Praha, Moraviapress 2004, s. 51–68.

7 Vopěnka, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*. Praha, Práh 2003.

8 Vopěnka, P., *Vyprávění o kráse novobaroční matematiky*. Praha, Práh 2004.

9 Kniha *The Theory of Semisets* z r. 1972 (Vopěnka, P. – Hájek, P., *The Theory of Semisets*. Transl. by T. Jech – G. Rousseau. Praha – Academia; Amsterdam – London – North-Holland Publishing Company 1972. 332 s.) volí ještě sevřenější styl výkladu, sestávající z číslovaných odstavců s definicemi, tvrzeními a důkazy, propojenými četnými odkazy a s minimem doprovodného textu. Taková prezentace se však nesetkala s pochopením čtenářů, o čemž vypovídají i komentáře v recenzích knihy: Levy, A., *The Theory of Semisets* by Petr Vopěnka and Petr Hájek (Review). *The Journal of Symbolic Logic*, 49, 1984, No. 4, s. 1422–1423; Jensen, D., Review of *The Theory of Semisets* by P. Vopěnka and P. Hájek. *Canadian Mathematical Bulletin*, 18, 1975, No. 5, s. 780–781.

pasáže si lze vyložit jako motivační, analytické nebo popularizační. Vopěnka si vytyčil nesnadný cíl: předložit nové základy matematiky. Věnuje tedy pochopitelně mnoho úsilí – a následně mnoho prostoru – snaze upozornit své čtenáře na jejich vlastní, více či méně reflektovanou, fixaci na matematiku založenou klasicky, jmenovitě tedy na klasický výklad nekonečna. Čím dál tím častěji také sahá do historie, zprvu ve snaze navázat své vlastní nové základy na různé historické milníky, například na některé aspekty Bolzanových prací, a dosáhnout tím přehození výhybky dříve, než vývoj dospěje k hegemonii takzvané Cantorovy teorie množin. Tyto exkurzy pak přecházejí v samostatné ambiciózní historické projekty.

Vopěnkovy *Meditace* tedy nejsou odbornou monografií, jakou bychom našli například v edičních řadách akademických nakladatelství. Z dikce i ze způsobu přijetí širší veřejností, jak v případě *Meditací*, tak i *Rozprav s geometrií* a *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*, je přesto zřetelné, že jejich autorem je renomovaný matematik. Vopěnkův věhlas v akademické matematice, mezioborový přesah jeho prací (a to zejména *Rozprav s geometrií*, které jsou v Česku patrně nejznámějším Vopěnkovým dílem) a fakt, že vycházejí mimo odborný tisk, vedou mimo jiné k absenci výrazné oponentury, jednomu z několika atributů, kterými se *Meditace* vymykají běžnému akademickému publikačnímu standardu.¹⁰ Řadě témat rozvíjených v *Meditacích* se však Vopěnka věnoval již v předchozích pracích, které běžné oponentuře podrobeny byly.

Okruh čtenářů, které by zaujaly všechny polohy Vopěnkových textů, je omezený. V pracích o Alternativní teorii množin někteří čtenáři rádi motivační či meditační pasáže přeskakují, nevidí jejich relevanci pro matematický výklad, nebo dokonce shledávají nesoulad matematické linie s její para-

10 K tomu viz poznámky K. Pacovské v rozhovoru: Fulínová, E. – Koblížek, T. – Pacovská, K. – Švec O., Lesky a bída současné české filosofie. *Reflexe*, 2021, č. 61, s. 117–136: „Vopěnka byl skvělý matematik, který se vyznačoval chvilhodnou otevřeností mysli v tom smyslu, že ho zajímaly i historické a filosofické aspekty matematiky. To však z člověka filosofa nedělá a na jeho textech je vidět, že jim chybí filosofická disciplína a metodologie, například důsledná argumentace a práce s relevantní literaturou. Mohli byste na to říci, že *Rozpravy s geometrií* jsou popularizační texty, a tedy jiný žánr, ale na to já odpovím: co přesně popularizují a jakou autoritou jsou zaštiťovány?“ Pacovská upozorňuje, že akademická expertíza v jednom oboru (ve Vopěnkově případě v matematice) není zárukou expertízy v odlišných oborech (ve filosofii nebo historii). Ztotožňují se s její výtkou ohledně absence rozboru a podrobnějších odkazů na předchozí (filosofické) práce, které Vopěnka porůznu zpracovává. Jím zvolený postup nejen komplikuje situaci čtenářů, ale vede i k otázce, jak se Vopěnka k samotnému kánonu a jeho vnitřní struktuře vztahoval. Z mého pohledu jde o palčivý problém především na samém okraji tohoto kánonu, tj. ve vývoji lokálním, současném, živém, tedy ne zcela kanonickém. Kdo by nám mohl říci lépe než sám Vopěnka, v čem specificky jej ovlivnili Ladislav Svante Rieger, Jiří Polívka nebo Petr Rezek, jejich publikované práce a neformální kontakt s nimi? Je proto škoda, že tuto výpověď v jeho textu nenacházíme. Nicméně mám za to, že tímto konstatováním by vnímání a zpracování Vopěnkova díla a přínosu nemělo skončit.

lelní Vopěnkovou interpretací.¹¹ Takové přeskakování není neschůdná cesta k Vopěnkově práci: matematická matérie se jeví jako samonosná a její exegezi si takoví čtenáři raději doplní sami. Vopěnkova a Hájkova kniha *The Theory of Semisets* sevřeností výkladu naznačuje, že Vopěnka takovou situaci toleroval a přinejmenším tehdy i podporoval, k tomu viz pozn. pod čarou č. 9. U posloupnosti Vopěnkových textů o Alternativní teorii množin lze vypožorovat vrstvení čím dál obsáhlejších výkladů pro v jádru *stále stejnou* teorii. Zlom nastává až s *Novou infinitní matematikou*,¹² kde došlo k výraznějším změnám (například, výklad není axiomatický).

Žánrová nevyhraněnost Vopěnkových *Meditací* a fakt, že vyšly v češtině a nedočkaly se překladů do dalších jazyků, mohou zastínit jejich přínos. Vopěnka v nich nabízí svou matematizaci světa, ne jako produkt, ale jako proces, který se zastaví na prahu, za nímž by mohl produkt následovat, třeba v podobě Alternativní teorie množin, v době vydání *Meditací* již matematicky dobře rozvinuté. S prodlevou vůči tomuto produktu byly tedy *Meditace* publikovány, nejspíš i sepisovány a domýšleny, ale na akceptování Alternativní teorie množin závislé nejsou. Mým výchozím stanoviskem je, že Vopěnkovy práce včetně Alternativní teorie množin jsou *podstatným příspěvkem k filosofii matematiky*. Tedy nejenže přispět chtějí, ale také se jim to daří. Stanovisko není dobrozdáním tohoto článku, jinak by bylo namísto jeho podrobné zdůvodnění. Namísto toho je jím článek motivován, pokusím se proto v této úvodní části nahrubo nastínit, v čem zejména jejich přínos spočívá.

Se spolupracovníky Vopěnka vyvinul dvě nově – a navzájem odlišné – axiomatické teorie množin, každou z nich jako novou matematickou ontologii. Jde o *Teorii polomnožin*, rozvíjenou zhruba v letech 1967–1975,¹³ a *Alternativní teorii množin*, rozvíjenou zhruba od roku 1973 do devadesátých let 20. století. Poté, co Vopěnka začal pracovat na Alternativní teorii množin, byla práce na předchozí teorii polomnožin opuštěna.¹⁴ Alternativní teorie množin rozvíjí novou koncepci nekonečna, radikálně odlišnou od té, kterou používá klasická matematika (i kniha *The Theory of Semisets*). Zejména tato teorie byla

11 Například v *Úvodu do matematiky v alternativnej teorii množin* (c.d.), kde Vopěnka rozebírá „pád do černé díry“ za obzorem přirozeně konečných přirozených čísel. To, zda skutečně „za obzorem přičítáním jednotky už nic nepřibývá“, zcela závisí na interpretaci užitých pojmů. Komplementární přístup k tomu shora uvedenému, tj. sledování Vopěnkovy výkladové linky bez studia matematických pasáží, se pravděpodobně mezi čtenáři vyskytuje také.

12 Vopěnka, P., *Nová infinitní matematika*. Praha, Karolinum 2015.

13 Ještě v roce 1975 vychází např. článek: Vopěnka, P. – Sochor, A., Contributions to the Theory of Semisets V: On the Axiom of General Collapse. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 21, 1975, s. 289–302.

14 Skupina na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, kterou Vopěnka vedl a také rozvíjel personálně, např. organizací seminářů otevřených studentům, zahrnovala celou řadu osobností. Přesto patrně nikdo z nich teorii polomnožin dále nerozvíjel poté, co od ní Vopěnka přešel k jiné své teorii.

dost podrobně rozpracována, každý člen Vopěnkovy skupiny věnoval práci na ní několik let své aktivní tvůrčí dráhy. Získaný materiál je pro matematiky výpovědí o tom, do jaké míry je teorie životaschopná. Vopěnkova skupina se tímto výkonem snaží matematickou komunitu oslovit: demonstruje teorii čitelným způsobem skrze konstrukce v ní provedené, opírající se formálně pouze o její axiomy. P. Zlatoš¹⁵ analyzuje míru, ve které se to u Alternativní teorie množin podařilo, a formuluje významný postřeh: bylo by chybou vykládat aktivitu současných matematiků, kteří implicitně pracují v Zermelo-vě–Fraenkelově teorii množin s axiomem výběru (zpravidla označované akronymem ZFC), jako vědomý příklon k ní coby základům matematiky. I když jsou jednotlivá odvětví matematiky interpretovatelná či rekonstruovatelná v ZFC, není namístě chápat jejich rozvíjení jako takový příklon; alternativní teorie mohou být s to případně poskytnout obdobnou službu a jednotlivá odvětví matematiky žijí do jisté míry svým vlastním životem, v nichž se společné axiomatické základy projeví jen sporadicky. Snahou Vopěnkovy skupiny bylo vypracovat podklad pro přijetí Alternativní teorie množin coby nových základů.

Obecněji, každá rozvinutá alternativní axiomatická teorie množin upozorňuje na fakt, že libovolná axiomatická teorie množin v roli základů matematiky je pouhou teorií. Prezentace některých alternativních axiomatických teorií se mohou nejprve vydat cestou rekonstrukce některých partií matematického světa (podobně jako to bylo provedeno v případě teorie ZFC), a to svými vlastními technickými prostředky. Krajním případem takového upozornění by byla expozice takové alternativní teorie bok po boku té klasické, bez slovního komentáře, a sdělení by šlo vyčíst, obdobně jako v předchozím odstavci, z úspěšně provedených konstrukcí v té které teorii. Alternativní teorie mohou tu klasickou teorii v leccěms i překonávat. S patřičným odstupem je možné takto – tj. jako pouhou teorii – nahlížet klasickou teorii množin i bez předkládání jakékoli alternativy. V jiných případech však alternativní axiomatické základy matematiky rekonstrukci klasicky budované matematiky vůbec nenárokuji a místo toho pracuji s vlastními kritérii.

Vopěnka ke své Alternativní teorii množin komentář podává: znovu a znovu poukazuje např. na kompetitivní postavení obou teorií, potřebu rozvinout v Alternativní teorii množin klíčové předaxiomatické pojmy, oblasti, ve kterých se klasická teorie množin jeví jako málo kompetentní, a také problematický vztah cantorovského nekonečna k naší zkušenosti, která jediná může být tím, vůči čemu má být matematická teorie, i ve své roli teorie nekonečna, adekvátní. Tyto pasáže Vopěnkových textů jsou podstatné: je-li axiomatická

15 Zlatoš, P., Vopěnkova alternativná teória množín alebo ťažký údel génia mimo hlavného prúdu. *Filosofický časopis*, 64, 2016, č. 4, s. 520.

matematika jen teorií, pak její vztah ke světu zkušenosti není dostupný zkoumání v ní samé, nýbrž je předmětem zájmu jiné disciplíny – filosofie, a jiné metody – argumentace. Těm Vopěnka dopřává ve svých knihách včetně *Meditací o základech vědy* prostor. Svědectví o úsilí posoudit míru adekvátnosti teorie, byť na odlišné rovině (totiž: zda je nově prezentovaná axiomatizace stejně adekvátní jako axiomatizace původní) lze najít například i v Sochorově článku „Metamathematics of the Alternative Set Theory I“,¹⁶ jinak vesměs matematickém textu: „Na konci této sekce zkusme zodpovědět otázku, zda naše formální teorie ob stojí jako formalizace názornějšího podání Alternativní teorie množin, tak jak je popsána v *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Co se axiomů týká, situace je jasná, protože všechny axiomy z *Mathematics in the Alternative Set Theory* jsou dokazatelné v naší formální teorii a naopak. [...] // Podstatně obtížnější – ale zároveň důležitější – je zodpovědět si, zda jsme vhodně formalizovali základní pojmy alternativní teorie množin – pojem ‚množiny‘ a pojem ‚třídy‘.“

Leitmotivem Vopěnkova příspěvku k filosofii matematiky je jeho nové pojetí nekonečna v rámci teorie množin, tedy nová definice pojmu *nekonečné třídy objektů*, takzvaně *přirozeně nekonečné*. Ta je formálně zachycena v navrženém axiomatickém systému Alternativní teorie množin, základní myšlenka ale žádným formalismem podmíněna není: třída objektů je *přirozeně nekonečná*, pokud má neostře vymezenou část (tj. podtřídu). Neostroť je jedním z příznaků subjektivity.¹⁷ Vopěnkovské přirozeně nekonečno jde tak ruku v ruce s jeho pojetím neostroťi.

Vopěnka se svým stanoviskem ohledně role klasické teorie množin přichází v knize *The Theory of Semisets* (a patrně ne dříve). To je poměrně krátce po důkazu nezávislosti hypotézy kontinua, kdy už byla závažně zpochybněna existence kanonické množinově-matematické reality, jejímž by takové teorie, jakou je ZFC, mohly být axiomatickým protějškem. Knihu tak lze vnímat jako krystalizaci Vopěnkova postoje poté, co se sám v rozvoji klasické teorie množin angažoval; byl tehdy jedním z těch, kteří se vymezovali vůči její dominantní roli. Pluralita v základech matematiky je fenomén, o kterém

16 “At the end of this section let us try to answer the question whether our formal theory can be held as a formalization of the more intuitively taken alternative set theory so as it is described in *Mathematics in the Alternative Set Theory*. As far as the axioms are concerned, the situation is clear since all axioms of *Mathematics in the Alternative Set Theory* are provable in our formal theory and conversely. [...] // It is essentially more complicated – but also more important – to give an answer if we formalized by a convenient way the basic notions of the alternative set theory – the notions of ‘set’ and the notion of ‘class.’” Sochor, A., *Metamathematics of the Alternative Set Theory I. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 20, 1979, No. 4, s. 710.

17 Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternativnej teórii množin*, c.d., s. 93.

dnes mluvíme s jistou samozřejmostí,¹⁸ takový stav věcí ale nastává právě s přispěním osobností, jakou byl Petr Vopěnka, byť se tvůrčí aktivita některých z nich odehrávala na výspách odborného zájmu.

2. Osvětlování a cesta k obzoru

Po úvodních poznámkách k Alternativní teorii množin věnujme pozornost také geometrickému vkladu do *Meditací*. Vopěnkova odbornost v geometrii¹⁹ i zájem o ni jakožto vědecké a kulturní dědictví byly přetaveny v monumentální *Rozpravy s geometrií*. Knižní série předkládá osobitý vývoj geometrie od antiky až po zavedení neeukleidovských geometrií. Jak sám Vopěnka upozorňuje v úvodu, nejde mu o historii se všemi jejími událostmi, dokumenty, prvenstvími, souběhy a podobně, tedy o takzvaný „dějepis“. ²⁰ Jeho plánem je odhalit a vyložit „nevědomí matematiky“ (tedy nejen geometrie), přičemž historická věrnost je vedlejší: „[...] myšlenky, které nás při pohledu na antickou geometrii napadají, vykládáme tak, jako kdyby již tehdy někoho napadly, i když třeba nenapadly nikoho. Krátce řečeno, antická geometrie je spíše zdrojem námětů pro naše úvahy než vlastním předmětem studia“. ²¹ Autorský záměr série *Rozprav* je tedy výslovně interpretační.

Knihu lze číst jako velké vyprávění o geometrii – přinejmenším platí, že epika je atraktivním vodítkem. Z elementů geometrických teorií se Vopěnkovi povedlo učinit hybatele děje: příkladem je vyšetřování role pátého Eukleidova postulátu. Jedna z podstatných rovin výkladu v *Rozpravách s geometrií* je právě ta, která je spojená s vhodnou axiomatikou pro geometrii: ač s výhradami,

18 Viz např. Centrone, S. – Kant, D. – Sarikaya, D. (eds.), *Reflections on the Foundations of Mathematics. Univalent Foundations, Set Theory, and General Thoughts*. Springer 2019. Dostupné na: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15655-8>; [cit. 24. 10. 2025].

19 Vopěnka analytickou geometrii přednášel na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy a napsal k ní skripta. V jejich úvodu kupř. píše: „V geometrii jsou nejpoučnější takové úvahy, které co nejméně využívají analytický aparát, čímž se rozumí bezduché počítání. To však neznamená, že bych chtěl preferovat syntetickou [tj. axiomatickou – pozn. aut.] geometrii. Syntetická geometrie na rozdíl od analytické má mnohem menší obor působnosti a mnohem omezenější metody. Myslím, že nejvíce mohou splnit své poslání přednášky z analytické geometrie, při nichž se co nejméně počítá a co nejvíce myslí.“ Vopěnka, P., *Analytická geometrie*. Praha, Státní pedagogické nakladatelství 1964, s. 3.

20 Vopěnka, P., *Úhelny kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*, c.d., s. 13. Mírně pejorativní nádech, který Vopěnka termínu vtiškl, je nejspíš veden odsudkem Husserlovým: „Veškeré dějepisectví zabývající se jen fakty setrvává v nesrozumitelnosti, poněvadž stále jen naivně činí závěry rovnou z fakt, aniž učiní tématem obecnou půdu smyslu, na níž takové závěry vesměs spočívají, a aniž kdy prozkoumalo obrovské strukturální apriori, jež je této půdě vlastní.“ Husserl, E., *Krise evropských věd a transcendentální fenomenologie*. Přel. O. Kuba; dvě průvodní studie napsal J. Patočka. Praha, Academia 2024, Příloha III, s. 430.

21 Vopěnka, P., *Úhelny kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*, c.d., s. 21.

je si Vopěnka dobře vědom konstitutivní moci formální axiomatické teorie – ve smyslu, jehož krajní polohu formuloval Hilbert: „Píšete: [...] Z toho, že jsou axiomy pravdivé, plyne, že nejsou vzájemně ve sporu.“ Tuto Vaši větu jsem si přečetl s velkým zájmem, protože po celou dobu, co o těchto věcech přemýšlím, píší a přednáším, uvádím pravý opak: pokud libovolně dané axiomy nevedou ve svých důsledcích ke sporu, pak jsou pravdivé a jimi definované věci existují. Toto je pro mne kritérium pravdy a existence.“²²

V *Rozpravách s geometrií* Vopěnka popisuje možnost „vstoupit do světa“ (axiomatické) hyperbolické geometrie prostřednictvím jejího soustředěného studia.²³ Ličí proces, který k takovému vstupu vedl, jako pokus o důkaz sporu v axiomatickém systému. Sám bezespornost nevnímá jako vstupní parametr takového zkoumání, ale jako výžitek *aktuálnosti* takového „hyperbolického geometrického světa“ pro toho, kdo se jím *důsledně* zabýval,²⁴ aniž ke sporu dospěl.

Čtenář *Rozprav s geometrií* nebo *Meditací* se záhy setká s pojmy, které se nepojí s běžným studiem geometrie: vopěnkovský obzor, ale také pojem uskutečnitelnosti.²⁵ Vopěnkův výklad systematicky pracuje s *naším* pohledem do světa a s *naší* přítomností v něm. Povaha *naší* účasti na zkoumání toho, jak se věci mají, je centrálním tématem *Meditací*, výslovně pak před-

22 „Sie schreiben: [...] Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen.“ Es hat mich sehr interessiert, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer umgekehrt gerade sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge. Das ist für mich das Kriterium der Wahrheit und der Existenz.“ Gabriel, G. – Kambartel, F. – Thiel, Ch. – Veraart, A. (Hrsg.), *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell sowie ausgewählte Einzelbriefe* Freges. Hamburg, Felix Meiner Verlag 1980, XV/4, s. 12.

23 V této souvislosti srov. také zmínku o nahlížení do matematických světů: Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 92.

24 Vopěnka tedy považuje bezespornost neeukleidovských geometrií za fakt, o kterém se propONENTI přesvědčili prací v těchto teoriích (tedy i bez dokazování případných výsledků o relativní bezespornosti vůči jiným, známějším teoriím): „Nezvrtnou jistotu číšíci ze samozřejmosti, s jakou Bolyai a Lobačevskij hlásali objev hyperbolického geometrického světa, si můžeme vysvětlit buď jako lehkomyšlnou sázku na tento svět, nebo jako opravdové poznání toho, že bezespornost tohoto světa je sama zřejmá. Obratnost, s jakou se po tomto světě pohybovali, však nasvědčuje, že druhé z toho je blíže pravdě. Tito geometři totiž objevili hyperbolický geometrický svět tak, jak byl v antice objeven geometrický svět popsáný v Eukleidových *Základech*. Jim se tento nový geometrický svět otevřel, takže do něj mohli nahlížet stejným způsobem, jakým my nahlížíme do klasického geometrického světa. Pro ně byl tento svět stejnou skutečností, jakou je pro nás klasický geometrický svět, a v důsledku toho jeho bezespornost byla pro ně naprostou samozřejmostí. Bolyai a Lobačevskij tedy objevili hyperbolický geometrický svět netoliko jako možný svět, ale objevili jej v jeho uskutečnění.“ Vopěnka, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*, c.d., s. 876.

25 „S přirozenou uskutečnitelností jsme nevystačili ani při zkoumání přirozeného geometrického světa. I tehdy jsme se museli čas od času utíkat o pomoc k Diovi a využívat jeho schopností.“ Tamtéž, s. 506.

mětem zájmu první meditace, a zahrnuje jak *naši* přítomnost v samém předmětu zkoumání (Vopěnka si vypůjčil pojem vrženosti, doslova: „spleť jevů, do níž jsem uvržen“), tak *naši* účast na jeho výkladu („tvorba výkladů a pojmů tak poznenáhlu mění vzhled zkoumaného světa“).²⁶ První osoba není pouhým výrazem shovívavého průvodcovství po světě geometrie; *naše* přítomnost je stěžejním předpokladem tázání se po pravdě (opět doslova: „odkrývání“). Záměrem je revize již proběhnuvší matematizace světa: „Podobně další a další fyzikální a později podle jejich vzoru i jiné jevy světa, v němž žijeme, nevstoupily do reálného světa novověké vědy ve své původní danosti, ale vyprázdněné od svých náplní, které byly nahrazeny náplněmi matematickými.“²⁷ Vopěnkova poznámka: „moudrý vědec věděl, že poznatky ze světa čisté vědy je třeba přenášet do přirozeného reálného světa opatrně a že na něm záleží, do jaké míry se rozhodne je použít“,²⁸ tu souzní s poněkud radikálním stanoviskem Penelope Maddyové deklarovaným v práci „What Do We Want a Foundation to Do?“, „Koncem devatenáctého a počátkem dvacátého století nastal rozmach čisté matematiky a aplikovaná matematika pozbyla nároku na vlastní doslovnou pravdivost. Ukázalo se, že v matematice nejde o zjišťování přesné formální struktury fyzického světa. Namísto toho nabízí plejádu abstraktních modelů, mezi kterými mohou vědci volit při zpracování popisných úkolů. Takový matematizovaný popis obvykle obnáší explicitní idealizace a aproximace a aplikovaní matematici vynakládají nemalé úsilí při zdůvodňování, jak a proč takové ne právě doslovné popisy přece jen fungují, často jen pro omezenou škálu případů.“²⁹

Meditace jsou protkané vizuálními metaforami; světlo je Vopěnkovi médiem poznávání v širokém smyslu, nejen vnímání zrakem,³⁰ a samo není středem pozornosti. Podobně se ještě před *Meditacemi* Vopěnka vyjadřuje i ve statí „O co jde v alternativní teorii množin“: „Klasické spočetné nekonečno vypracováváme z uvedené posloupnosti [přirozených čísel – pozn. aut.] tak, že náš pohled na ni neustále vyostřujeme, tedy oddalujeme obzor.“³¹ Geo-

26 Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 20.

27 Tamtéž, s. 54.

28 Tamtéž, s. 28.

29 “By the end of the nineteenth and beginning of the twentieth centuries, as pure mathematics proliferated and applied mathematics lost its claim to literal truth, it became clear that mathematics isn’t actually in the business of discerning the precise formal structure of the physical world. Rather, it provides an array of abstract models for the scientist to choose from for any particular descriptive job. Most of these mathematical descriptions involve explicit idealizations and approximations, and applied mathematicians expend considerable effort on explaining how and why these non-literal representations are nonetheless effective, often within a limited range of cases.” Maddy, P., What Do We Want a Foundation to Do? Centrone, S. – Kant, D. – Sarikaya, D. (eds.), *Reflections on the Foundations of Mathematics*, c.d., s. 295.

30 Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 11.

31 Vopěnka, P., O co jde v alternativní teorii množin, c.d., s. 56.

metrie tak je osvětlováním geometrického světa³² a přírodověda zase světa reálného.³³ Takových světů je pak ovšem povícero.

Pokusím se teď o výklad některých specifických rysů vopěnkovského poznávání. Třetí meditace dospívá k pojmu tzv. *fundamentální triády*:³⁴ ta je tvořena osvětlenou (tj. pohledem zachycenou) částí pozorovaného předmětu, jeho neosvětlenou částí a obzorem.³⁵ K fundamentální triádě se Vopěnka propracoval ani ne tak přes první dvě kapitoly, jako spíše přes mnoho svých předchozích pojednání včetně několika knih. Ve všech pracuje s obzorem ve smyslu, který je s formulací fundamentální triády v souladu. Při pohledu na pozorovaný předmět splývá jeho osvětlená část s viditelnou částí; část, kterou nevidíme, je totožná s neosvětlenou částí; obě části pozorovaného předmětu (osvětlená a neosvětlená) jsou od sebe odděleny obzorem, nepřekrývají se a spolu pak skládají celý předmět.³⁶ Obzor sám není částí pozorovaného předmětu; přisuzujeme jej pohledu.³⁷

Musí za obzorem ohraničujícím náš pohled vždy něco být?³⁸ Pohledem nejsme pochopitelně s to prokázat, že pozorovaný předmět nějakou neosvětlenou část vůbec má. Přítomnost neosvětlené části je jedním z explicitních předpokladů výkladu; je podpořená tzv. *iniciálním principem*.³⁹ Ten zahrnuje

32 Vopěnka, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*, c.d., s. 35; týž, *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 33.

33 Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 39.

34 Tamtéž, s. 59.

35 „Předmět“ Vopěnka zavádí jako „nějakou část spleti jevů, do níž jsme uvrženi, která se v dané chvíli z nejrůznějších důvodů dostala do středu našeho zájmu“. Tamtéž, „Světlem“ se rozumí „takové shluky jevů, které lze vykládat jako jednoduché (a svým způsobem i svébytné) celky“. Tamtéž, s. 13. Problémy zavedení těchto pojmů zpracovává Peregrin ve své recenzi *Meditací*: Peregrin, J., Rozpaky nad Vopěnkovými „Meditacemi o základech vědy“. *Filosofický časopis*, 51, 2003, č. 3, s. 509–513.

36 Namísto je opatrnost ve vyjadřování: termíny „část“ nebo „oddělovat“ jsou osídlné. Získat osvětlenou část odděleně od neosvětlené je patrně obtížné. Vopěnka na to upozorňuje (s využitím pojmu ostrosti; obě části jsou navzájem odděleny neostřím). Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., třetí meditace, s. 59–61. Obdobně se Vopěnka vyjadřuje i v Úvodu do matematiky v alternativní teorii množin: „[...] samotný obzor, t.j. obzor ako taký, je takisto javom ostrým, určitým a trvalým. [...] Hoci samotný obzor je javom ostrým, to, čo leží pred obzorom, je vymedzené neostro. Čím bližšie k obzoru sa nejaký jav nachádza, tým neostrejšie ho vidíme. Presnejšie, v smere vedúcim k obzoru sa stretávame s neostrosťou; čím bližšie k obzoru, tým zreteľnejšie sa nám jav neostrosti ukazuje. [...] No prísne vzaté za obzor sa dostať nemôžeme. Prekročiť jestvujúci obzor znamená dostať pred obzor niečo, čo bolo za obzorom, presnejšie, čo si vykládame tak, že to predtým bolo za obzorom a za čo sme teraz obzor posunuli. Samotný obzor je snáď vôbec tou najtvrdšou medzou, v ktorej sme zovrení a ktorú nevieme prelomiť.“ Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*, c.d., s. 135.

37 Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 60.

38 Tamtéž, s. 65.

39 „Iniciální princip. Osvětlená část pozorovaného předmětu nám poskytuje oporu, která ovšem ve směru k obzoru slábne. Přitom je lhostejno, zda tímto předmětem je nějaký shluk či svět jevů, nebo jev jediný táhnoucí se až k obzoru. To, o co nám jde především, však leží za obzorem oddělujícím osvětlené od neosvětleného. O tom (nikoliv o tom všem) nám pak více či méně

silná tvrzení o kontinuitě toho, jak se věci mají před obzorem, a toho, jak se mají za ním, zejména v blízkém okolí obzoru, takzvaném „přesahu krajiny známosti“. Rozumí se, že princip se týká pouze situací s obzorem coby mezí, která osvětlenou část vymezuje neostře. Tam, kde je naopak vymezení ostré, netroufneme si o takovém principu uvažovat. Devátá meditace říká, že nestabilní změny objektu nebudeme analyzovat, protože „o nich nedovedeme nic kloudného říci“.⁴⁰ Iniciální princip a stabilní změna tedy nejsou univerzální, vystihují jen výšeč možných situací. Je to ale výšeč podstatná, Vopěnka takové situace řadí mezi základní životní zkušenosti: „Čo je neostré, to poukazuje za seba, to ďalej pokračuje, alebo plynulo prechádza v niečo iné. Preto tiež svet ležiaci pred obzorom pokračuje i za obzorom, a preto smerom k obzoru je náš svet otvorený. Svetu teda rozumieme tak, že pokračuje i za obzorom, tam však dosiaľ nie je osvetlený.“⁴¹

Krátce po této ukázce následuje diskuze role obzoru v Alternativní teorii množin. V předchozí knize *Mathematics in the Alternative Set Theory* je Vopěnkovo vyjadřování zdrženlivé, co se týká akceptace axiomu prodloužení (který je možné chápat jako matematické zakotvení iniciálního principu): „Toto [axiom prodloužení – pozn. aut.] je samozřejmě hypotéza, kterou nelze ověřit, pokud neopustíme své stanoviště nebo zásadně nevylepšíme své pozorovací schopnosti. [...] Axiom prodloužení je hypotézou, která poslouží jako základ exaktní znalosti nad rámec evidence.“⁴² V *Meditacích* Vopěnka pak ale usiluje odvodit plynulé pokračování předmětu za obzorem z povahy obzoru samého.⁴³

Jak vypadá nasvícení zkoumaných předmětů? Vopěnkovské světlo není difúzní: má zdroj. Zdroje světla jsou v *Meditacích* diskutovány, například ve slibném, ale stručném „objevit princip neznamená osvětlit další část světa, ale objevit zdroj světla“.⁴⁴ Taková povaha osvětlení je čitelná už v zavedení fundamentální třídy, v uvažování neosvětlené části v ní a vůbec v diskuzi o světle a temnotě. Viz například: „Od pádu do této temné neznámé propasti (do této *terra incognita*) odvrátilo posloupnost přirozených čísel zapisování číselných řádů pomocí mocnin čísla deset.“⁴⁵

srozumitelnou zprávu podává obzor. Jednak tím, že nás nenásilně vede k přijímání tezí (to je k prodlužování některých výkladů z osvětlené části na neosvětlenou část), jednak tím, že jevy na něm ležící nás vyzývají, abychom je vykládali jako projevy jevů ležících za ním.“ Tamtéž, s. 61.

40 Tamtéž, s. 192.

41 Vopěnka, P., Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín, c.d., s. 135.

42 “This [prolongation axiom] is, obviously, a hypothesis that cannot be verified unless we leave our stand or improve substantially our observational ability. [...] The prolongation axiom is a hypothesis which serves as a base for exact knowledge exceeding evidence.” Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*, c.d., s. 39.

43 Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 68.

44 Tamtéž, s. 62.

45 Tamtéž, s. 120.

Dalším pozorováním je, že pozice zdroje světla je shodná s pozicí, ze které se díváme: vidíme právě jen osvětlenou část a nasvícení slábne směrem od *nás* k obzoru. Vopěnkův iniciální princip, tj. „osvětlená část pozorovaného předmětu nám poskytuje oporu, která však směrem k obzoru slábne“, by byl stěží plauzibilní, pokud by se do osvětlení předmětu vměšovalo více světelných zdrojů z náhodných pozic: marně bychom si totiž kladli otázku, který směr „k obzoru“ má vlastně autor na mysli. Pouhou reformulací zmíněných pasáží tedy je, že nasvícení není rovnoměrné a jeho míra slábne se vzdáleností od *nás* k obzoru.

Modelovým příkladem osvětleného předmětu bez ostrých hran je koule. Při pohledu, o nějž Vopěnkovi běží, se koule ukazuje nasvícená z *našeho* stanoviště (tak, jak by se nám ukazoval ideální Měsíc v úplňku). Směrem k okraji, tj. obzoru, se koule vytrácí v přirozené perspektivě vyjádřené iniciálním principem. Kontrastní situací, kterou úvaha nepodporuje, by byl srpek koule (obdobný srpku Měsíce), na jehož nasvícené straně by byla ostrá hranice, přitom tato část koule by od *nás* byla vzdálenější než ty části, ve kterých by byl pozorovatelný obzor. Přijímáme-li tedy Vopěnkovu tezi o pokračování předmětů za obzorem, je to na základě takové evidence, jakou poskytuje koule nasvícená jako úplněk.

Ten, komu by pozorování o totožnosti *naší* pozice se zdrojem světla nepřipadalo přesvědčivé, by patrně ve Vopěnkových pracích a také v následujícím textu za střed úvah bral nikoli *nás*, ale právě zdroje světla v obecných polohách. Mluví-li Vopěnka například o oddalování a přibližování obzoru,⁴⁶ chtěl by takový čtenář nejspíš uvažovat vzdálenost předmětu od světelného zdroje v nespécifické pozici.

Pozorování není v konfliktu s osvětlováním z různých stran, které Vopěnka také příležitostně diskutuje. Kupříkladu v *Úvodu do matematiky v alternativnej teórii množín* Vopěnka prezentuje úvahu, v níž zdroji světla jsou principy, které mohou „osvětlovat“ z rozličných, i protichůdných, stran.⁴⁷ Jde o *proces*, ve kterém osvětlování osobně, postupně („časem“) a aktivně realizujeme. Takový proces osvětlování pak může vést k protichůdným *porozuměním*, dokonce klamu, jak odstavec uvádí.

Jiným příkladem je již zmíněná diskuze o způsobu vedení důkazu sporem v *Rozpravách*: „Proto také nesmíme osvětlování tohoto [domněle sporného, ‚předem odsouzeného‘ – pozn. aut.] světa provádět jednostranně, ale právě naopak, musíme tento svět osvětlovat pokud možno co nejvšestranněji, neboť nevíme, ve kterém směru se hledaný spor nachází, popřípadě zda tento spor nevznikne až ze spojení nějakých poměrně značně různorodých po-

46 Tamtéž, s. 71.

47 Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternativnej teórii množín*, c.d., s. 133.

znatků o tomto světě. Krátce řečeno, při osvětlování tohoto světa si budeme počínat tak, jakoby tento svět byl možný, to jest, budeme hromadit různé poznatky o tomto světě, a nikoliv netrpělivě vyhlížet spor; ten se nám totiž časem ukáže sám.⁴⁸

Mým záměrem je vyzdvížení způsobu, kterým je v uvažovaných situacích určen směr od nás k obzoru. Například v šesté kapitole *Meditací* se přímo mluví o *cestě k obzoru*: „Vypadá to, jako kdyby při pohledech různými směry byl obzor různě vzdálený. Tak například při pohledu z Eiffelovy věže vedeném přes domy a ulice až k okrajovým čtvrtím města se zdá, že obzor je mnohem dále než při pohledu směrem ke stále menším a menším částčkám papíru ležícího před námi na stole.“⁴⁹ Vopěnka rozebírá také situace vymykající se smyslovému vnímání, mluví například o osvětleném počátku posloupnosti přirozených čísel.⁵⁰ Třetí meditace také diskutuje přirozená čísla: „[...] i v osvětlené části světa poznávaného tělesnými smysly leží jevy, které jsou naprosto ostré, to je neostrostí nedotčené. Nejsou to však ty jevy tohoto světa, které obvykle vykládáme jako objekty nebo jako vlastnosti. Jsou to malá přirozená čísla. [...] Čísla hodně veliká již v jejich naprosté čistotě před obzor nedostaneme.“⁵¹

Příklady prezentované v *Meditacích* mohou vést k otázce, který ze směr je oním, který míří *k obzoru*, protože směřů je v každém z nich více (například oblohu lze pozorovat v různých směrech). Vopěnkova odpověď ve třetí meditaci je prostá. Každý *naš* pohled v *jakémkoli* směru je omezen pevnou hranicí nebo obzorem; obzor se tedy může nacházet v libovolném směru. Vyžaduje se ovšem předpřipravené pochopení pro obzor, tedy pro klíčový pojem výkladu: „I když jsme toho o obzoru ještě mnoho neřekli, nepochybně každý již dobře ví, čemu tak říkáme. Ví to stejně dobře, jako ví, čemu říkáme úsečka, a přitom kdybychom měli říci, čemu říkáme úsečka, také bychom toho příliš mnoho říci nemuseli, a ostatně ani neuměli.“⁵² Je to *naše* přítomnost, která Vopěnkovi umožní bez dalšího vysvětlování používat taková sousloví jako „před/za obzorem“, „blízko obzoru“, „v pásmu obzoru“, „prodlužování za obzor“, „táhnout se k obzoru“, „propadnout se za obzor“, „pohledech mířících v ústřety jevům za obzorem povstávajícím“, později také „věčná obrazovka“ a podobně.

Třírozměrnost považuje Vopěnka za pevnou mez *našich* pohledů do světa⁵³ a podobně explicitní vyjádření nalezneme i v *Rozpravách s geometrií*: „[...] dimenze prostoru je jedním z jeho nejvýraznějších znaků. Ne ve směru do dálky ani ve směru do hloubky, ale ve směru dimenze si poprvé uvědomu-

48 Vopěnka, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*, c.d., s. 838–840, pozn. pod čarou č. 21.

49 Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 132.

50 Tamtéž, s. 123.

51 Tamtéž, s. 63–64.

52 Tamtéž, s. 60.

53 Tamtéž, s. 59.

jeme, že reálný svět má své hranice.⁵⁴ Naproti tomu veškerý charakteristiky vopěnkovský vyjadřovací aparát, jehož podstatné příklady uvádí konec předchozího odstavce, se týká *jediné dimenze* zkoumaných situací, a to osy směru *našeho* pohledu. Ke zvýraznění jednodimenzionality situací můžeme vopěnkovskému aparátu pro účely tohoto článku říkat třeba *šipka*. „Šipkou“ zde tedy rozumíme soubor termínů, které si uchovávají význam společný situacím s obzorem toho kterého *našeho* pohledu. Není zapotřebí je vykládat, ale všímáme si, že k jejich výkladu postačuje jisté prostorové uspořádání jediné osy. Cílem zde není pojmosloví šipky zafixovat: příklady uvádí předchozí odstavec, ale podstatná je právě otevřenost ve smyslu možnosti využívání dalších a dalších termínů, které *naše* situace s obzorem samy nabízejí.

Na cestě k matematické teorii se tedy „šipka“ uplatní ještě před vymezením formální terminologie, jejíž chování by bylo potřeba ukotvit axiomaticky. Pojmy šipky jsou pracovními nástroji abstrakce v tom smyslu, že zachycují strukturu celé plejády situací. Také Vopěnkova fundamentální triáda je takovým nástrojem: jde o postupný krok v procesu, na jehož konci se zpravidla nachází matematická teorie. Můžeme si tedy například klást otázku, zda je takový krok, a tím i celý proces, jehož se takový krok účastní, adekvátní a užitečný.

Kanonickou situací s obzorem je ubývání ostrosti pohledu. To je v *Meditacích* diskutované opakovaně, šestá kapitola se věnuje matematizaci neostrosti. Vopěnka v ní píše: „Ačkoliv podle povahy zkoumaného předmětu (a v neposlední řadě též pohledu na něj vrženého) má i neostře vymezení osvětlené části tohoto předmětu různé tváře, přesto přinejmenším ubývání zřetelnosti jevů ubíhajících až na obzor a poukaz na jejich plynulé pokračování v přesahu krajiny známosti jsou všem společné. // Výchozím bodem našich úvah budou tedy cesty směřující k obzoru, cesty vedoucí až na obzor a jejich pokračování za obzorem. Abychom se mohli řídit radou, kterou jsme vyčetli z Bolzanova programu množinové matematiky dvacátého století, budeme tyto cesty zachytávat posloupnostmi kroků, které by bylo třeba na nich vykonat. [...] Délkami těchto posloupností pak můžeme v tom či onom případě měřit vzdálenost obzoru a prostřednictvím jejich jemnější struktury modelovat některé zvláštnosti jeho umístění.“⁵⁵ Ve třetí meditaci je pak příkladem obzoru – pohledu zrakem – obloha. Podstatným příkladem je i ostrost pohledu na geometrické útvary, podrobně diskutovaný již v *Rozpravách s geometrií*: „Obzor nyní nechápeme v tom nejobecnějším smyslu, ale ve smyslu zúženém,

54 Opět se diskutuje třídímenzionální prostor. Termíny „dálka“ a „hloubka“ jsou pro Vopěnku reciproké. Vopěnka, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*, c.d., s. 492.

55 Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*, c.d., s. 132.

tedy vlastně do jisté míry původním, jakožto obzor zřetelnosti vidění, v geometrii pak jako obzor zřetelnosti geometrického vidění.⁵⁶

Osmá meditace přes úvahy o ostrosti pohledu míří k pojmu *věcné obrazovky*; opět jde o dopilování úvah, které Vopěnku provázejí dlouhodobě. Co vyvolává paradox hromady? – ptal se v *Úvodu do matematiky v alternativní teorii množin*. Inu, hromada se vskutku může skládat ze zrněk písku, ale ta jsou za obzorem ostrosti našeho pohledu (zde: rozlišitelnosti), tj. samotný fakt, že *vidíme* hromadu, *mluvíme* o hromadě, že je pro nás jevem, svědčí o tom, že zrnka písku, sama skladba hromady ze zrněk, jsou za obzorem rozlišitelnosti, nejsou na věcné obrazovce.⁵⁷ To pak vede k úvahám o *relaci* nerozlišitelnosti a jejích vlastnostech. Osvětlení tu přestává být podstatné a do popředí se dostává samotný vztah *nás* a předmětu nebo rovnou světa, a také měřítko našeho pohledu do něj. Vopěnka píše mj. o „jevišti“, na němž se odehrává dění světa poznávaného tělesnými smysly.⁵⁸ Situace, ve kterých se zabýváme ostrostití pohledu, opravdu měřítko mají a Vopěnkův specifický přínos k jejich výkladu lze postihnout v jediné dimenzi; obojí díky *naší* přítomnosti.

Dalo by se tvrdit, že k situacím zachyceným „šipkou“ lze doplnit matematický korelát, uspořádání nějakého tzv. nestandardního modelu aritmetiky přirozených čísel. Takové tvrzení má snad i předem umetenou cestičku k hodnověrnosti vzhledem k Vopěnkově oblibě nestandardních modelů, i když nikoli pod tímto označením. Ale ještě výstižnější je říci, že Vopěnka systematicky vyhledával, popisoval a do jisté míry i antcipoval situace, pro které by nestandardní struktury mohly matematický korelát představovat.⁵⁹ Staly se pro něj poselstvím o *našem* pobývání ve světě, jeho interpretačním klíčem.⁶⁰ Vracíme se tak k jedné z „nasmíčených“ situací, k *naším* pohledům na přirozená čísla. Některá čísla se nacházejí za obzorem, což si můžeme snadno ověřit, pokud se pokoušíme dostatečně velká čísla například pojmenovat nebo vzájemně odlišit. Není přitom podstatné, zda se díváme z pozice

56 Vopěnka, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií*, c.d., s. 179.

57 Vopěnka používá pojem *mediálního pohledu* na třídu: v případě hromady písku se zrnka písku a celá hromada písku „propadla za obzor“. Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternativní teorii množin*, c.d., s. 246–247.

58 Tamtéž, s. 190.

59 To naznačuje můj článek: Haniková, Z., Vopěnkova Alternativní teorie množin v matematickém kánonu 20. století. *Filosofický časopis*, 70, 2022, č. 3, s. 485–504. Termín „nestandardní“ je užíván ve smyslu započatém Skolemovou prací: Skolem, T., Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlvariablen. *Fundamenta Mathematicae*, 23, 1934, Nr. 1, s. 150–161.

60 V souvislosti s tzv. ultraproduktem struktury přirozených čísel Vopěnka o poselství mluví takto: „Odtud plyne, že množina vůbec všech přirozených čísel neexistuje, neboli obor všech přirozených čísel není aktualizovatelný. Právě to je hlavní poselství ultraprodktu.“ Vopěnka, P., *Nová infinitní matematika. Prolegomena*. Praha, Karolinum 2014, s. 29.

čísla 0, úvaha je invariantní vůči posunutí o konečný (rozumí se *přirozeně* konečný) počet jednotek, tj. z pozice čísla nula uvidíme stejnou situaci jako z pozice čísla osm, podstatný je ale směr pohledu: díváme se tam, kam čísla ubíhají. Navíc ale pro *naš* náhled na přirozená čísla nejsou tyto matematické struktury plně výstižné: při takovém pohledu řetězec přirozených čísel mizí za obzorem velmi záhy.⁶¹

Cesty k obzoru, případně i dál, jsou *našim* prostředkem strukturování prostoru, o čemž vypovídá výše citovaný úryvek ze šesté meditace. Vopěnkovské spočetné přirozené nekonečno, matematicky rozpracované v obou monografiích o Alternativní teorii množin, je matematizací⁶² takových cest: „Ten případ přirozeného nekonečna, jenž se po vyostření stal základem nekonečna klasického, totiž spočetnost, je abstrahován z cesty vedoucí k obzoru.“⁶³ Tento a podobné Vopěnkovy vhledy je užitečné mít na paměti při čtení jeho komentářů k produktu kanonického způsobu strukturování prostoru, totiž kartézským souřadnicovým osám: „Nakonec ještě poznamenejme, že právě souřadnicové osy jsou jedním z prvních případů plniva geometrického prostoru, které nepatří mezi čistě geometrické jevy. Tyto osy totiž nejsou jenom přímky, ale jsou to osy čísel, rozumí se reálných; jsou to reálná čísla na přímkách znázorňovaná.“⁶⁴ Můžeme prostor vykládat jako strukturovaný přímo kartézskými souřadnicemi (jak víme, Vopěnka považuje dimenzi, tj. samotný počet os, za *naš* pevně danou), nicméně k číselné struktuře podložené jednotlivým osám žádný přímý přístup nemáme a přinejmenším některé její vlastnosti jsou určeny naším výkladem (jako struktury reálných čísel).

Vopěnka tu opět vyzdvihuje roli výkladu, mluví o *všudestojnosti* klasického geometrického světa: „Všudestojnost geometrického světa, vložená do jeho klasického výkladu a odtud přenesená na klasická přirozená čísla v podobě geometrických zákonů, nás tedy natolik zaslepila, že vůbec nejsme schopni vykládat pokračování přirozených čísel v dálkách za obzorem jinak.“⁶⁵ Situace není taková, že by Vopěnka předkládal cesty k obzoru a další

61 K výkladu *našeho* obzoru v přirozených číslech není nestandardních modelů teorie přirozených čísel nejspíš zapotřebí: jak již bylo uvedeno, jsme s to přehlédnout jen malý počáteční úsek uspořádání přirozených čísel dle velikosti, počínaje libovolně zvoleným počtem, např. osm, a to nezávisle na tom, jak čísla reprezentujeme. Toto je diskutováno v páté kapitole *Meditací*. Samotné termíny „standardní“ a „nestandardní“ nepatřily k Vopěnkovým oblíbeným (přinejmenším od období, v němž se věnoval Alternativní teorii množin). V závěrečných sekcích *Prvních rozprav s geometrií* odpovídá našima očima přehlednějším řetězcům přirozených čísel pojem *aktuálního přirozeného nekonečna*.

62 Vopěnkovou matematizací světa se zabývá článek: Trlifajová, K., Infinity and Continuum in the Alternative Set Theory. *European Journal for Philosophy of Science*, 12, 2022, No. 3, sekce 6.

63 Vopěnka, P., O co jde v alternativní teorii množin, c.d., s. 62.

64 Vopěnka, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Souborné vydání *Rozprav s geometrií*, c.d., s. 526.

65 Tamtéž, s. 333; s. 335.

pojmy „šipky“ jako alternativní prostředky strukturování situací, případně v jakési superpozici k těm kanonickým. Postup jeho výkladu implikuje, že pojmy „šipky“ jsou *pro nás* výchozím a dostupným popisem známých situací; od třetí meditace dále se ve výkladu pojmy šipky objevují a jejich smysl je demonstrován na příkladech. Následně se lze zabývat axiomatickou fixací formální teorie a zvažovat, jak výchozímu aparátu odpovídá.

3. Diskuze

Cesta k obzoru, fundamentální triáda a další stěžejní prvky expozice v *Meditacích* promlouvají jen nepřímě k teoretickým základům matematiky, kterými v úvodní sekci podpírám tezi o Vopěnkově přínosu její filosofii. Analytická práce s obzorem a odvozený aparát jsou partikulárním příkladem hledání struktury světa. Takové hledání je pro matematika typickou činností, práce se strukturou je mu vlastní, ačkoliv termín „struktura“ nabývá v matematice specifických významů. Vopěnka ve svém hledání navazuje na velikány, jakými jsou Bolzano, u nějž Vopěnka zdůrazňuje hledání množství coby společného jmenovatele nekonečna, nebo Cantor, proti jehož pojetí nekonečna Vopěnka staví svou alternativní teorii. Vopěnkova aktivita zúročená v *Meditacích* je krok stejným směrem, jde o identifikaci společné struktury či osnovy v běžných situacích.

V *Meditacích* tak lze vysledovat záměr, který Vopěnka mohl uplatnit již při návrhu Alternativní teorie množin a jistě jej uplatnil v *Úvodu do matematiky v alternativní teorii množin*. Záměrem je akcentování ambivalence nahlížení struktury přirozených čísel a obecněji číselných oborů, a to do té míry, že ve Vopěnkově výkladu je často předpokládán nějaký nestandardní model se stejnou samozřejmostí, s jakou je v obvyklém výkladu předpokládán model standardní („všudestejnost“). Dalo by se tedy tvrdit, že Vopěnkovo pojetí se snaží zrušit prioritu standardního modelu přirozených čísel? Dalo, ale pouze pokud by výchozím stanoviskem bylo, že standardní model takovou prioritu má. Vopěnka sám by takovou formulaci nejspíš nepodpořil. To, jak je veden výklad v *Úvodu do matematiky v alternativní teorii množin*, jí sice místy nahrává,⁶⁶ ale patrně z důvodů vesměs didaktických. Jiné klíčové Vopěnkovy formulace naznačují, že v jeho pohledu standardní pojetí přirozených čísel prioritu nemá, tudíž ani sám termín „standardní“ nemá dobrý smysl.⁶⁷

66 Vopěnka např. upozorňuje čtenáře, že jeho vnímání struktury přirozených čísel, které se označuje za *klasické*, je pouze jedním z možných. Viz sekce 4.9 *Úvodu do matematiky v alternativní teorii množin* (c.d.).

67 Vopěnka v *Nové infinitní matematice* volí termín „nová“ (oproti dřívějšímu „alternativní“) ve snaze nepřiznat klasické teorii kanonický status. Viz Vopěnka, P., *Nová infinitní matematika*, c.d.

Vyzdvížení stabilního, ale stále ještě neformálního pojmosloví, tzv. „šipky“, jehož modely vystačí s jednou dimenzí, je jedním z dobrozdání tohoto článku. Jde o ukázkou výsledku Vopěnkovy práce ve výkladu struktury světa: takzvaná „šipka“ se uplatní jako soubor termínů v bohatším, různorodějším, otevřeném prostředí *našich* běžných situací (víme, že se jedná o výšeč situací možných). Vopěnka nabídl jako protipól svých úvah rozvinutou Alternativní teorii množin. Chronologicky byla Vopěnkova alternativní teorie publikována mnohem dříve než *Meditace o základech vědy* a také dříve než slovensky vydaný *Úvod do matematiky v alternativnej teórii množín* nebo i esej „O co jde v alternativní teorii množin“. To považuji z hlediska samotného vztahu šipky a její formalizace za vedlejší, i když to může hrát klíčovou roli ve zkoumání případných motivací pro vznik Alternativní teorie množin, kde se úvaha o sledu věcí přímo vnučuje. Kniha *Mathematics in the Alternative Set Theory* přináší přísliby později formulovaných a rozvíjených úvah o cestách k obzoru, celkem v rozsahu několika porůznu roztroušených odstavců. Vopěnka zkraje stati „O co jde v alternativní teorii množin“ konstatuje, že v ní rozvíjená východiska (pro již publikovanou teorii) jsou ta původní. Co do adekvátnosti vztahu mezi teorií a situacemi se šipkou málo záleží na tom, zda takové situace chápeme v první řadě jako substrát pro teorii (ve smyslu jí předcházející) nebo její aplikace (ji následující) nebo máme za to, že obojí jde ruku v ruce.

Předložený výklad je doplněním i usměrněním toho Vopěnkova, napřích jeho jednotlivými pracemi, vpsled je mou interpretací jistého aspektu jeho práce a hledání struktury v ní. Mou expozici by Vopěnka nesjpiš neschvaloval. Nepřítakal by průřezovému posouzení svých dostupných relevantních prací při interpretaci *Meditací*, možná by preferoval důraz na *Novou infinitní matematiku*.⁶⁸ Izolace názvosloví šipky by se mohla jevit jako nemístné slovíčkaření a akcentace nestandardních modelů aritmetiky a jejich vztahu k modelu standardnímu jde proti jeho tendenci potlačit výklad Alternativní teorie množin prostřednictvím jejích (klasických) modelů. Text také připisuje další otazník k Vopěnkově výtce, že si čtenářská obec neodnesla ze studia knihy *Mathematics in the Alternative Set Theory* adekvátní ponětí o jejích filosofických východiscích. Uvážíme-li však, co všechno bylo třeba postupně dopovědět po vydání této knihy, bylo její kýžené pochopení zprvu vůbec možné?

Záludnou vlastností Vopěnkových *Meditací* je, že v nich podaný výklad autorových tezí nemusí být tím nejčtivějším dostupným, nýbrž reprodukuje dřívější verze prezentované jinde. Například podrobnější a v kontextu po-

68 Z osobní komunikace s ním během roku 2013 například vyplynulo, že Alternativní teorii množin, tak jak ji podává *Mathematics in the Alternative Set Theory*, považoval již za překonanou.

zoruhodný výklad obzoru a jeho oddalování lze nalézt v *Prvních rozpravách s geometrií* – tam, kde se Vopěnka zabývá uskutečnitelností lidskou a božskou. Také výklad polomnožin (a množin a tříd) je – domnívám se – snazší načerpat z jiných Vopěnkových prací a ten, jenž je obsažen v *Meditacích*, s ním pak konfrontovat. Izolovaná kniha *Meditací*, bez doplňku dalších Vopěnkových prací, včetně textů matematických, je tedy čtenářskou výzvou. Přitom ale zároveň *Meditace* některé předchozí výklady dotahují, což je také důvod, proč je třeba jim věnovat pozornost. Předložený detailnější pohled na Vopěnkovy vyjadřovací prostředky, které *Meditace* prezentují v ucelené formě, přdestřel mj. kontury minimalistického modelu charakteristického vopěnkovského pojmosloví, dříve v něm jen naznačené.