

Elías Fuentes Guillén: Matematické dílo Bernarda Bolzana ve světle jeho rukopisů

Přeložili Alena Šolcová, Jakub Šolc a Kateřina Trlifajová.
Praha, Filosofia 2023. 173 s.

Byť byl Bernard Bolzano od mládí zaujat matematikou a jejími filosofickými základy, jeho profesní cesty se ubíraly jiným směrem, takže se matematice věnoval většinu času jen okrajově. Během svého života publikoval několik matematických prací, v závěru života pak rozpracoval rozsáhle koncipované dílo věnující se různým oborům matematiky, které však bohužel nebylo dokončeno; ne zcela dohотовeno zůstalo i další významné dílo, *Paradoxy nekonečna*, které vyšlo až posmrtně. Přestože je Bolzanův matematický odkaz v mnoha ohledech pozoruhodný, byla (a je) jeho zajímavost odkrývána jen pozvolna a postupně.

Recenzovaná kniha vznikla spojením tří článků věnovaných Bolzanovu matematickému dílu, které autor publikoval původně anglicky ve třech různých zahraničních časopisech. O překlad do češtiny se postarali Alena Šolcová, Jakub Šolc a Kateřina Trlifajová (všichni tři mimochodem matematici a zájemci o Bolzanovo dílo). Autor se ve své práci zaměřuje především na Bolzanovo zápolení s pojmem nekonečně malého a na otázku možnosti definování reálných čísel.

V první části se autor věnuje historii publikování Bolzanovy práce *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik (Příspěvky ke zdůvodněnějšímu výkladu matematiky)* a oznámení o jejím vydání, na jehož sepsání se Bolzano patrně významně podílel. Z tohoto oznámení (které je v appendixu kapitoly uvedeno v plném znění) vyplývá, že Bolzano si na *Beyträge* cenil především svého rozboru logických pojmů a zákonů, pomocí kterých musejí být základy matematiky vystavěny. Potřeba důkladného logického aparátu vedla posléze Bolzana, jak známo, k sepsání jeho rozsáhlého díla o logice, *Wissenschaftslehre (Vědosloví)*. Zároveň jeho důraz na logiku již v jeho rané publikaci vyjevuje postoj, který Bolzano k matematickým zkoumáním měl: přistupoval k nim s požadavkem pevného logického ukotvení matematiky jako deduktivně vystavěné vědy (včetně aristotelského požadavku dokazovat věty jen prostředky příslušného matematického oboru, nikoli pomocí vět a prostředků jiných oborů, tedy nikoli „*per aliena et remota*“).

Ve druhé části se autor soustředí na Bolzanův raný přístup k vypořádání se s užíváním nekonečně malých (a nekonečně velkých) veličin, které bylo běžnou matematickou praxí od zavedení infinitesimálního počtu G. W. Leibnizem a nezávisle na něm I. Newtonem. Nekonečně malé veličiny byly užitečné v praxi diferenciálního a integrálního počtu, nicméně trpěly určitou nevyjasněností a postrádaly přesnou definici: místy se s nimi pracovalo jako s nulou, místy nikoli, takže kritikové

infinitesimálního počtu upozorňovali na nekonzistenci jejich užívání.⁴ Rovněž Bolzanovi se pojem nekonečně malého množství vymezený jako množství menší než každé myslitelné (*gedenkbare*) množství zdá protimluvný a pokouší se zpracovat danou problematiku jiným způsobem. Autor podrobuje Bolzanův přístup a jeho vývoj pečlivému rozboru, přičemž se opírá i o Bolzanovy matematické zápisky (které byly vydány až dlouho po Bolzanově smrti jako *Miscellanea Mathematica*): ukazuje, že Bolzano, věren již zmíněné zásadě, že nelze pojem vymezovat pomocí jiných oborů, nevidí jako slibnou cestu uchopení nekonečně malého pomocí proměnnosti v čase (v jeho době bylo možné se setkat s definicí nekonečně malých veličin jako mizících, „těkavých“ veličin, braných v úvahu „přesně v tom okamžiku, kdy právě zmizely“, s. 62⁵). V rámci své definice spojitosti funkce v práci *Rein analytischer Beweis*⁶ (*Ryze analytický důkaz*) proto Bolzano navrhuje používat proměnné veličiny ω , vymezené jako určitá množství, která se mohou stát ještě menšími než každé dané množství, což ho přivádí k formulaci nápadně připomínající známou a dnes používanou ε - δ definicí spojitosti. Autor ovšem upozorňuje, že se podle jeho názoru Bolzanova definice, navzdory tradičním interpretacím, odlišuje ve způsobu, jak pojímá onu ω : Bolzano se sice podle autora částečně odklání od „kinetického“ pojetí ω jako něčeho průběžně proměnlivého a na čase závislého, na druhé straně ale ještě plně nepřijímá pozdější statické pojetí kontinua chápaného jako „statické bytí“ reálných čísel (nebo bodů), stvořených předem nebo pojatých platónsky“ (s. 54). Nedochozí tedy ještě v plném rozsahu k „posunu od limit nekonečných posloupností k myšlence hraničního bodu množiny“ (s. 81). Podle autora je tudíž „v Bolzanově pojetí veličiny určité vnitřní pnutí, které je (...) cizí současnému pojmu čísla“ (s. 50).

V poslední, třetí části se autor zabývá Bolzanovou teorií „měřitelných čísel“, která bývá některými badateli považována za raný pokus o teorii reálných čísel. Zdrojem je Bolzanovo rozpracované dílo *Reine Zahlenlehre*, autor se však zabývá i dalšími Bolzanovými texty a poznámkami předcházejícími vznik *Reine Zahlenlehre*. Bolzano původně nepracoval s myšlenkou iracionálního čísla („množství věcí téhož druhu“), nýbrž iracionální veličiny (tj. toho, „co je schopno býti zvětšováno nebo zmenšováno“, s. 90), jež je „veličinou, která je určena pomocí čísel, ale vyžaduje operaci, kterou nelze nikdy dokončit“, což umožňuje přiblížit se ke zmíněné veličině „tak přesně, jak si přejeme“ (s. 92–93).

4 Případní zájemci o toto téma mohou velmi precizní rozbor problematiky a historie nekonečně malých veličin nalézt v: Jelínková, V., Nekonečně malá veličina v základech matematické analýzy v 17. a 18. století. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 13, 1968, č. 3, s. 151–161. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/137623>; [cit. 5. 1. 2024].

5 Všechna čísla stránek uváděná v textu odkazují na recenzovanou knihu.

6 Jedná se o běžně používané zkrácení celého názvu práce, který zní: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden reálný kořen rovnice).

Autor dále podrobně sleduje Bolzanovo úsilí o precizní definici čísel. Bolzano připouští možnost, že bychom namísto s čísly pracovali s číselnými výrazy, a to i v případech, kdy příslušným výrazům žádná čísla ve skutečnosti neodpovídají (což se v Bolzanově koncepci týká např. nejen výrazu $\sqrt{-1}$, ale i o či zápisu zlomku). Bolzano připouští „rozšíření pojmu čísla“ (s. 109) o pojem proměnné číselné představy, která může nabývat potenciálně nekonečně mnoha hodnot: její hodnota se tedy může stále dál zvětšovat (zmenšovat), přitom je ale vždy konečná (nenulová). Dále pracuje s tzv. nekonečnými číselnými výrazy, tj. např. nekonečným součtem řady. Takovýto celek sice podle Bolzana obsahuje neurčitelné množství částí, ale sám může být teoreticky určitelný, pokud existuje nějaké pravidlo (zákon) či konečné množství pravidel, která určují jeho každou jednotlivou část. Tak jsou například přirozená čísla určena tím, že každé má svého následníka.

Jako „měřitelné výrazy“ pak Bolzano označuje takové, kdy lze nekonečný číselný výraz S pro libovolné q zapsat pomocí dvou rovnic $S = \frac{p}{q} + P$ a $S = \frac{p+1}{q} - P'$ (kde P je kladný či nulový, P' kladný číselný výraz), tedy lze ho pro libovolné q „ohraničit“ pomocí zlomků $\frac{p}{q}$ a $\frac{p+1}{q}$. Číselný výraz pak podle Bolzana označuje *nekonečně velké číslo* (např. součet nekonečné řady $1 + 2 + 3 + \dots$) v tom případě, je-li *neměřitelný*, tj. nelze jej zapsat výše uvedeným způsobem pomocí dvou rovnic (podobně je neměřitelná o či divergentní řady).

Autor poukazuje na některé nejasnosti a problémy Bolzanova pojetí (odkazuje např. na článek Kateřiny Trlifajové a Steva Russe *Bolzano's Measurable Numbers: Are They Real?*,⁷ který upozorňuje na problém s Bolzanovou definicí sčítání měřitelných čísel) a dále uvádí různé návrhy a pokusy o opravu Bolzanova pojetí, částečně se opírající o Bolzanovy vlastní poznámky. Autor upozorňuje na riziko takovéhoho přístupu: snaha uvést Bolzanovy návrhy do souladu se současnou koncepcí s sebou nese riziko nesprávné interpretace; ovšem snaha o zachování věrnosti Bolzanovu návrhu zase přináší různé nejasnosti a nekonzistentnosti. Autor má za to, že je potřeba hodnotit Bolzanovo dílo v kontextu dobového rozvoje matematiky i v kontextu Bolzanova vlastního myšlenkového vývoje a uvědomit si jejich povolnost: „Končící ‚paradigma vědy o veličině‘ (...) bylo ve skutečnosti zdoluhavým procesem, který přesáhl Bolzanův život a trval po celé toto [19.] století.“ (s. 129).

Autor pečlivě analyzuje nejen Bolzanovy publikované práce, rozpracované texty i poznámky z jeho rukopisů a sekundární literaturu, ale také dobové matematické zdroje. Za jeho výkladem je tedy očividně obrovské množství práce. Detailní autorův rozbor nám dává nejen nahlédnout do dané matematické problematiky, ale také umožňuje pochopit, že některé části Bolzanových nejistot a zápolení nebyly ani tak

7 Trlifajová, K. – Russ, S., Bolzano's Measurable Numbers: Are They Real? In: Zack, M. – Landry, E. (eds.), *Research in History and Philosophy of Mathematics. The CSHPM 2015 Annual Meeting in Washington D. C.* Cham, Birkhäuser 2016, s. 39–56.

technického rázu, ale dotýkaly se spíše samých základů a východisek matematiky, které zdaleka nejsou tak samozřejmé. Autor například zmiňuje článek Paola Mancosu,⁸ který upozorňuje na skutečnost, že Bolzanův odlišný přístup k mohutnosti nekonečných množin, který se zásadně odlišoval od etablovaného Cantorova pojetí, nachází nově oporu v alternativních matematických teoriích. Tyto teorie se snaží, stejně jako Bolzano, formálně zachytit intuitivní přesvědčení, že například počet přirozených čísel je větší než počet sudých čísel. Bolzanovo lpění na principu, že celek je větší než část (které autor rovněž zmiňuje), nelze jen tak odbýt jako dávno překonané – opuštění tohoto principu představuje mnohem více (značně kontraintuitivní) výchozí postulát než nějaký výdobytek vědeckého vývoje.⁹ Jinde autor píše, že „Bolzano (...) ve svém *Ryze analytickém důkazu* dokonce setrvává na názoru, že [iracionální množství] nemohou být ‚kompletně určena‘ číselným zápisem“ (s. 77) – to je ovšem ve skutečnosti přístup, který je ještě o mnoho let později obhajován například Wittgensteinem navzdory etablovanému cantorovskému pojetí.¹⁰

Autor správně upozorňuje na to, že v matematice Bolzanovy doby probíhala podstatná změna paradigmatu, které se začalo přiklánět ke statickému, platónskému bytí kontinua – přirozeně ovšem vyvstává otázka, zda se ono tehdy postupně přijímané paradigma, dnes v matematice etablované, opět nemůže změnit, možná takovým způsobem, který by byl Bolzanovi bližší. Byť se sám autor současnými alternativními koncepcemi blíže nezabývá, pouze je občas zmíní, jeho pečlivý výklad umožňuje čtenáři celou problematiku důkladně promyslet: nejen sledovat vývoj určitých matematických pojmů či koncepcí, ale i pochopit a uvážít problémy a úskalí rozličných pojetí a uvědomit si, jaké různé výchozí předpoklady s sebou nesou.

Příhodné je, že citáty z jiných jazyků (tedy především z němčiny) jsou v drtivé většině případů uvedeny v původním znění v poznámkách pod čarou – je to podstatné i proto, že jejich český překlad je místy poněkud nejasný.¹¹ Je ovšem pochopitelné, že takovýto dvojitý překlad (to, co bylo z němčiny přeloženo do angličtiny, je dále z angličtiny překládáno do češtiny), nanejmeně bolzanovského technického jazyka, není nic snadného – překladatelé na sebe vzali nelehký úkol.

8 Mancosu, P., Measuring the Size of Infinite Collections of Natural Numbers: Was Cantor's Theory of Infinite Number Inevitable? *The Review of Symbolic Logic*, 2, 2009, No. 4, s. 612–646.

9 Srov. Trlifajová, K., Bolzano's Infinite Quantities. *Foundation of Science*, 23, 2018, No. 4, s. 681–704.

10 Srov. např. Kolman, V., Continuum, Name and Paradox. *Synthese*, 175, 2010, No. 3, s. 351–367. Dostupné na: <https://doi.org/10.1007/s11229-009-9527-7>; [cit. 6. 1. 2024].

11 Jen několik příkladů: překlad „pomyslné množství“ zvolený pro „gedenkbare Grösse“ nepovažují za úplně šťastný, z kontextu „kleiner als jede gedenkbare Grösse“ se jedná spíše o „myslitelné množství“ (např. s. 58) – ve třetí kapitole je to ostatně takto překládáno. Na s. 41 je málo srozumitelná formulace „... tradiční *modus barbara* (s předpokladem, že minoritní předchází majoritnímu: ...)“ – zde původní znění není uvedeno, z kontextu se ale očividně jedná o „premisu major“ a „premisu minor“, což by bylo možné také přeložit jako „vyšší premisu“ a „nižší premisu“, případně alespoň ponechat ono „majoritnímu“ v ženském rodu. Na s. 110 je „freylich sich selbst widersprechend“ přeloženo jako „volně si protiřečící“.

Na knize je trochu znát, že vznikla „slepením“ tří článků dohromady: zvláště první článek (tj. první kapitola) není v celku příliš organicky začleněn. Text knihy navíc trpí rozšířeným nešvarem vědeckých časopisů, totiž včleňováním odkazů v závorkách přímo do hlavního textu – ano, vím, dělá se to tak, ale k přehlednosti a čitelnosti to rozhodně nepřispívá.

Je však třeba ocenit, že autor tímto způsobem zprostředkovává své erudované bolzanovské studie i českému čtenáři: obávám se, že osobnost Bernarda Bolzana není u nás stále náležitě doceňována. Lze snad doufat, že dostatek česky psané bolzanovské literatury zvýší zájem o Bolzana i v českém prostředí.

Marta Vlasáková

Filosofický ústav AV ČR, v. v. i., Praha

marta.vlasakova@flu.cas.cz